CONCURSO PÚBLICO DE PROVAS E TÍTULOS PARA O CARGO EFETIVO DE PROFESSOR DA CARREIRA DE MAGISTÉRIO SUPERIOR – EDITAL Nº 53/2018 – PROGRAD

CHAVE DE CORREÇÃO DA PROVA ESCRITA

Área: 10 - Matemática: Pura

Leia com atenção:

Prezado candidato, atente-se para as regras específicas desta prova:

a) **A questão 01 é obriga**
b) **Você deve escolher s ...e 2 (duas) questões dentre as questões 02 a 06.**
c) **Cada questão deve ... espondida de forma dissertativa, contendo as informações essenciais para o desenvolvimento do tema e/ou demonstração do resultado principal.**

QUESTÃO 01 (3,34): Enuncie e demonstre o Teorema da Função Inversa adicionando algumas definições, terminologias e resultados preliminares.

1. **Enunciar corretamente o Teorema - 0,54 pt.**
2. **Demonstrar parcialmente o Teorema da Função Inversa- 1,4 pt.**
3. **Demonstrar totalmente o Teorema da Função Inversa - 2,8 pt.**

Dentre as questões abaixo, escolha somente 02 questões. Cada questão escolhida tem o valor de 3,33 pontos.

QUESTÃO 02 (3,33): Disserte sobre o Teorema de Gauss-Bonnet (caso local ou global) e sua demonstração, adicionando algumas definições, terminologias e resultados preliminares.

CHAVE DE RESPOSTA

Esta chave de resposta apresenta um roteiro de como o candidato pode desenvolver o tema proposto na questão.

Conceitos iniciais (0,52 pontos):

O Teorema de Gauss-Bonnet afirma que o excesso sobre da soma dos ângulos internos de um triângulo geodésico T é igual à integral da curvatura Gaussiana K sobre T.

- **Definição de uma curva regular simples, fechada e regular por partes;**
- **Enunciar o Teorema do Índice de Rotação (não há necessidade de demonstrar).**

Admite-se a apresentação de qualquer uma das duas versões do Teorema de Gauss-Bonnet (local ou global).

1. **Teorema de Gauss-Bonnet (caso local) (total: 2,81 pontos)**
   a. **Definições e terminologias (0,81 pontos):**
      i. **Região simples;**
      ii. **Curva orientada positivamente;**

CONCURSO PÚBLICO DE PROVAS E TÍTULOS PARA O CARGO EFETIVO DE PROFESSOR DA CARREIRA DE MAGISTÉRIO SUPERIOR - EDITAL Nº 53/2018 - PROGRAD

CHAVE DE CORREÇÃO DA PROVA ESCRITA

Área: 10 - Matemática: Pura

   iii. **Integral de uma função diferenciável em S, onde S é uma superfície orientada, sobre uma região $R \subset S$.**

b. **Enunciar e demonstrar o Teorema de Gauss-Bonnet (caso local) (2 pontos)**

Sejam S uma superfície parametrizada regular de parametrização ortogonal $X : U \to S$ e R ⍰ S uma região simples de fronteira α orientada positivamente e parametrizada pelo comprimento de arco. Sejam $\alpha(s_0), \cdots, \alpha(s_k)$ vértices de α e $\theta_0, \cdots, \theta_k$ as medidas dos seus respectivos ângulos externos em radianos. Então

$$\sum_{i=0}^{k} \int_{s_i}^{s_{i+1}} k_g(s)ds + \int\int_{R} Kd\sigma + \sum_{i=0}^{k} \theta_i = 2\pi$$

sendo k_g a curvatura geodésica dos arcos regulares de α e K a curvatura gaussiana de S.

OU

2. **Teorema de Gauss-Bonnet (caso global) (total: 2,81 pontos)**
   a. **Definições e terminologias (0,81 pontos):**
      i. **Região regular $R \subset S$, com S uma superfície regular;**
      ii. **Região triangular e família finita de triângulos;**
      iii. **Característica de Euler-Poincaré da Triangulação.**
   b. **Enunciar e demonstrar o Teorema de Gauss-Bonnet (2 pontos)**

Seja R ⍰ S uma região regular [illegible] uma superfície orientada e sejam $C_1, \ldots, C_n$ as curvas fechadas simples e regulares por partes que formam a fronteira ∂R de R. Suponha que cada C_i é orientada positivamente e sejam $\theta_1, \ldots, \theta_p$ o conjunto de ângulos externos das curvas C_i. Então

$$\sum_{i=1}^{n} \int_{C_i} k_g(s)ds + \int\int_{R} Kd\sigma + \sum_{l=0}^{p} \theta_l = 2\pi\chi(R)$$

onde s denota o comprimento de arco de C_i, e a integral em C_i representa a soma das integrais em todos os arcos regulares de C_i.

QUESTÃO 03 (3,33): Disserte sobre 'Extensões Algébricas de um Corpo', começando com conceitos elementares e avançando até as definições e resultados principais.

CHAVE DE RESPOSTA

O candidato deverá usar todos os conceitos fundamentais para o desenvolvimento do tema, podendo incluir ou não os seguintes (os itens 01 a 04 representam 0,1 pontos, cada. Cada item de 05 a 21 valem 0,2 pontos, cada. A pontuação final, contudo, não deve exceder 3,33 pontos. Com isso, cada candidato pode ou não escrever sobre determinados pontos, dos quais podem não ser relevantes dentro de sua abordagem, sem prejudicar sua avaliação.):

CONCURSO PÚBLICO DE PROVAS E TÍTULOS PARA O CARGO EFETIVO DE PROFESSOR DA CARREIRA DE MAGISTÉRIO SUPERIOR – EDITAL Nº 53/2018 – PROGRAD

CHAVE DE CORREÇÃO DA PROVA ESCRITA

Área: 10 - Matemática: Pura

1. **Elemento algébrico sobre um corpo:**

   Seja F ⍰ K uma extensão de corpos. Um elemento α ⍰ K é dito algébrico sobre F se existe um polinômio não nulo f(x) ⍰ F[x] tal que f(α)=0. Em outras palavras, o núcleo do homomorfismo ϕ_α : F[x] → K, f(x) → ϕ_α(f(x)) = f(α) é não nulo;

2. **Elemento transcendente sobre um corpo:**

   É um elemento não algébrico;

3. **Característica de corpos:**

   A característica de um corpo F, denotado por Ch F, é o gerador não negativo do homomorfismo de grupos (anéis)

   ϕ : Z → F, n → n.1_F = 1_F + ⋯ 1_F, n parcelas .

   Em outras palavras, a característica de um corpo é zero ou o menor inteiro positivo n tal que n.1_F = 0;

4. **Subcorpo primo:**

   O subcorpo primo de um corpo F é o subcorpo de F gerado pela identidade multiplicativa 1_F ;

5. **Extensão de um corpo:**

   Um corpo K é dito uma extensão de F se K contém F como um subcorpo. Notação: F ⍰ K. O corpo F é chamado de corpo base da extensão F ⍰ K;

6. **Grau de uma extensão:**

   O grau de uma extensão de corpos F ⍰ K, denotado por [K : F], é a dimensão de K considerado como um espaço vetorial sobre F;

7. **Extensão finita:**

   Uma extensão F ⍰ K é chamada finita se [K : F] é finito. Caso contrário, a extensão é dita infinita;

8. **Corpos finitamente gerados:**

   O corpo gerado sobre F por uma coleção finita de elementos α_1,...,α_r ⍰ K, denotado por F(α_1,...,α_r), é o menor subcorpo de K contendo F e α_1,...,α_r ;

9. **Extensão finitamente gerada:**

   Extensão F ⍰ K na qual existem finitos elementos α_1,...,α_r ⍰ K tais que K = F(α_1,...,α_r);

10. **Extensão simples:**

    Extensão F ⍰ K na qual existe α ⍰ K tal que K = F(α);

CONCURSO PÚBLICO DE PROVAS E TÍTULOS PARA O CARGO EFETIVO DE PROFESSOR DA CARREIRA DE MAGISTÉRIO SUPERIOR – EDITAL Nº 53/2018 – PROGRAD

CHAVE DE CORREÇÃO DA PROVA ESCRITA

Área: 10 - Matemática: Pura

11. Polinômio mínimo:

Seja F ⍰ K uma extensão de corpos e α ⍰ K algébrico sobre F. O polinômio mínimo de α sobre F, denotado por m_{α,F} (x), é o polinômio de menor grau em F[x] tendo α como raiz. Em outras palavras, m_{α,F} (x) é o gerador do núcleo do homomorfismo entre F[x] e K definido por f(x) → f(α).;

12. Corpo de raízes de um polinômio:

Chama-se corpo de raízes de um polinômio f(x) ⍰ F[x] ao menor corpo contendo F e todas as raízes de f(x);

13. Extensão algébrica:

Um corpo K é dito uma extensão algébrica de F se todo elemento de K é algébrico sobre F.;

14. Fecho algébrico:

O fecho algébrico de um corpo F é um corpo, denotado por F, algébrico sobre F e satisfazendo a condição em que todo polinômio f(x) ⍰ F[x] fatora-se completamente em F;

15. Corpo algebricamente fechado:

Corpo K no qual todo polinômio com coeficientes em K possui uma raiz em K. Em símbolos, \bar{K}= K;

16. Extensão normal:

Extensão F ⍰ K na qual todo polinômio irredutível em F[x] possuindo um raiz em K fatora-se completamente em K;

17. Extensão de um isomorfismo:

Sejam F ⍰ L e E ⍰ K duas extensões de corpos e ϕ : F → E um homomorfismo de corpos. Um homomorfismo ϕ˜ : L → K é dito uma extensão de ϕ se ϕ˜(c) = ϕ(c) para todo c ⍰ F;

18. Polinômio separável:

Polinômio sem raízes múltiplas. Se f(x) ⍰ F[x] é separável de grau n então f(x) possui n raízes distintas em seu corpo de raízes;

19. Elemento separável:

Um elemento α em uma extensão K de F é dito separável sobre F se α é raiz de um polinômio separável em F[x]. Equivalentemente, α é dito separável sobre F se é algébrico sobre F e seu polinômio mínimo m_{α,F} (x) é separável.;

20. Extensão separável:

Extensão F ⍰ K na qual todo elemento em K é separável sobre F;

CONCURSO PÚBLICO DE PROVAS E TÍTULOS PARA O CARGO EFETIVO DE PROFESSOR DA CARREIRA DE MAGISTÉRIO SUPERIOR – EDITAL Nº 53/2018 – PROGRAD

CHAVE DE CORREÇÃO DA PROVA ESCRITA

Área: 10 - Matemática: Pura

21. Exemplos.

QUESTÃO 4 (3,33): Enuncie e demonstre o teorema de existência e unicidade para equações diferenciais ordinárias de 1ª ordem adicionando algumas definições, terminologias e resultados preliminares.

1. Enunciar corretamente o Teorema - 0,53 pt.
2. Demonstrar parcialmente a existência de solução - 0,7 pt.
3. Demonstrar parcialmente a unicidade de solução - 0,7 pt.
4. Demonstrar totalmente a existência de solução - 1,4 pt.
5. Demonstrar totalmente a unicidade de solução - 1,4 pt.

QUESTÃO 5 (3,33): Enuncie e demonstre o Teorema Fundamental da Álgebra. (A exposição do resultado deve ser feita da forma mais completa possível enunciando e demonstrando resultados auxiliares que serão utilizados).

1. Enunciar corretamente o Teorema - 0,53 pt.
2. Enunciar os resultados auxiliares que foram utilizados na prova - 0,8 pt.
3. Demonstrar o Teorema Fundamental da Álgebra - 2,0 pt.

QUESTÃO 6 (3,33): Enuncie e demonstre o Teorema Espectral para operadores auto-adjuntos. (A exposição do resultado deve ser feita da forma mais completa possível enunciando e demonstrando resultados auxiliares que serão utilizados).

1. Enunciar corretamente o Teorema - 0,53 pt.
2. Enunciar os resultados auxiliares que foram utilizados na prova - 0,5 pt.
3. Demonstrar os resultados auxiliares utilizados na prova - 0,8 pt.
4. Demonstrar o Teorema Espectral para operadores auto-adjuntos - 1,5 pt.