	MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO **UNIVERSIDADE FEDERAL DO ACRE** **PRÓ-REITORIA DE GRADUAÇÃO - PROGRAD** **CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLÓGICAS – CCET**

EDITAL Nº 07/2019 - PROGRAD
PROCESSO SELETIVO SIMPLIFICADO PARA PROFESSOR SUBSTITUTO

PROVA ESCRITA DA ÁREA DE MATEMÁTICA

INSTRUÇÕES

1. Esta prova é composta de duas partes: a primeira (**Parte I**) contêm 6(seis) problemas, dentre os quais o candidato deverá escolher e resolver apenas 4(quatro) e a segunda (**Parte II**), contêm 6(seis) afirmações, onde o candidato deverá escolher apenas 4(quatro) e assinalar V(Verdadeiro) ou F(Falso), justificando-as brevemente.

2. Cada problema escolhido da parte I será avaliado em 1,75 pontos.

3. Cada afirmação escolhida da parte II será avaliada em 0,75 pontos.

4. Esta prova deve ser resolvida utilizando caneta esferográfica, com tinta na cor azul ou preta.

5. A prova terá duração de quatro horas.

6. Não será permitida nenhuma espécie de consulta durante a realização desta prova.

NÚMERO DE INSCRIÇÃO DO(A) CANDIDATO(A)				

Rio Branco, AC, 01 de abril de 2019.

Parte I – Escolha apenas 5(cinco) dos 7(sete) problemas abaixo e os resolva.

1. **Determine uma transformação linear T**: $\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ **tal que** $\mathbf{T(1,1,1) = T(5,5,5)}$**;**

Uma solução:

Se T é linear, então $\mathrm{T}(5,5,5) = 5\mathrm{T}(1,1,1)$. Assim, $\mathrm{T}(1,1,1) = 5\mathrm{T}(1,1,1)$ e daí, $\mathrm{T}(1,1,1) = (0,0)$. Sejam $v = (1,1,1)$, $u = (0,1,0)$ e $w = (0,0,1)$. O conjunto $\beta = \{v, u, w\}$ é uma base de $\mathbb{R}^3$. Procuramos $\mathrm{T}: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, tal que $\mathrm{T}(v) = (0,0)$. As imagens $\mathrm{T}(u)$ e $\mathrm{T}(w)$ são arbitrárias. Podemos, então definir $\mathrm{T}(u) = (1,0)$ e $\mathrm{T}(w) = (0,1)$. Seja $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Como

$$(x, y, z) = x(1,1,1) + (y - x)(0,1,0) + (z - x)(0,0,1),$$

Segue que

$$T(x, y, z) = xT(1,1,1) + (y - x)T(0,1,0) + (z - x)T(0,0,1)$$

$$= (y - x)(1,0) + (z - x)(0,1)$$

$$= (\, y - x, z - x). \blacksquare$$

2. **O máximo divisor comum de dois inteiros positivos a e b é 6. Para se chegar a esse resultado pelo processo das divisões sucessivas, os quocientes encontrados foram, pela ordem, 1, 1, 7, 3 e 4. Encontre os dois números**.

Uma solução:

Utilizando o processo das divisões sucessivas, para os inteiros positivos a e b, obtém-se:

- $a = b.1 + r;\ 0 < r < b$
- $b = r.1 + r_1;\ 0 < r_1 < r$
- $r = r_1.7 + r_2;\ 0 < r_2 < r_1$
- $r_1 = r_2.3 + r_3;\ 0 < r_3 < r_2$
- $r_2 = r_3.4$

Portanto $r_3 = mdc(a, b) = 6$, assim, $r_2 = 24$. Substituindo esses valores nas equações anteriores encontramos $a = 1218$ e $b = 648$. $\blacksquare$

3. **Um resultado muito útil para encontrar possíveis raízes racionais de um polinômio com coeficientes inteiros é o seguinte:**
   "Se uma fração irredutível $\boldsymbol{\frac{r}{s}}$, com $\boldsymbol{r}$ e $\boldsymbol{s}$ inteiros, é raiz de um polinômio com coeficientes inteiros
   $$\boldsymbol{p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n,}$$
   então $\boldsymbol{r}$ divide $\boldsymbol{a_0}$ e $\boldsymbol{s}$ divide $\boldsymbol{a_n}$."

   Utilize este resultado para encontrar todas as raízes reais do polinômio

   $$\boldsymbol{p(x) = 3 - 3x - 7x^2 + x^3 + 2x^4.}$$

Uma solução:

Veja que os divisores de $a_0 = 3$ são $1, -1, 3$ e -3 e os divisores de $a_4 = 2$ são $1, -1, 2$ e -2. Logo as possíveis raízes racionais de $p(x)$ são $1, -1, 3, -3$, $\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$, $\frac{3}{2}$ e $-\frac{3}{2}$. Agora, $p(1) = -4, p(-1) = 0, p(3) = 120$,

$p(-3) = 84, p\left(\frac{1}{2}\right) = 0$ e, com isso, temos duas raízes racionais de $p(x)$, a saber -1 e $\frac{1}{2}$. assim o polinômio $p(x)$

é divisível por $x + 1$ e por $x - \frac{1}{2}$ e, então, por $2\left(x - \frac{1}{2}\right) = (2x - 1)$

Dividindo $p(x)$ por $(x + 1)(2x - 1) = 2x^2 + x - 1$, segue que $p(x) = (2x^2 + x - 1)(x^2 - 3)$.

Portanto $p(x) = 0$ se, e somente se, $2x^2 + x - 1 = 0$ ou $x^2 - 3 = 0$ e as raízes de $p(x)$ são as soluções dessas equações do segundo grau, ou seja $-1, \frac{1}{2}, \sqrt{3}$ e $-\sqrt{3}$. ■

4. **Encontre a solução geral da equação $\mathbf{y'' + 2y' + \alpha y = 0}$ para $\boldsymbol{\alpha < 1}$.**

Uma solução:

Equação característica: $r^2 + 2r + \alpha r = 0$, cujo discriminante é: $\Delta = 4 - 4\alpha > 0$, pois $\alpha < 1$.
Assim, a equação característica tem duas raízes reais e distintas dadas por:

$$\begin{cases} r_1 = \dfrac{-2 + \sqrt{4 - 4\alpha}}{2} = \dfrac{-2 + 2\sqrt{1 - \alpha}}{2} = -1 + \sqrt{1 - \alpha} \\ r_2 = \dfrac{-2 - \sqrt{4 - 4\alpha}}{2} = \dfrac{-2 - 2\sqrt{1 - \alpha}}{2} = -1 - \sqrt{1 - \alpha} \end{cases}$$

Portanto a solução geral é dada por: $y(t) = C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t} = C_1 e^{\left(-1+\sqrt{1-\alpha}\right)t} + C_2 e^{\left(-1-\sqrt{1-\alpha}\right)t}$. ■

5. Construa o gráfico da função definida por $f(x) = \frac{1}{x^2-1}$.

Uma solução:

Solução: $D_f = \{x \in \mathbb{R} / x \neq \pm 1\}$

- Pontos Críticos:

$$f(x) = (x^2-1)^{-1} \Longrightarrow f'(x) = -(x^2-1)^{-2}.2x = \frac{-2x}{(x^2-1)^2}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

- Monotonicidade:

$$x < 0 \Longrightarrow f'(x) > 0 \therefore f \text{ é crescente}$$

$$x > 0 \Longrightarrow f'(x) < 0 \therefore f \text{ é decrescente}$$

- Concavidade:

$$f'(x) = -(x^2-1)^{-2}.2x \Longrightarrow f''(x) = \frac{6x^2+2}{(x^2-1)^3}$$

Como o numerador é sempre positivo e o sinal do denominador é o sinal de $x^2 - 1$, temos:

$$-1 < x < 1 \Longrightarrow x^2 - 1 < 0 \Longrightarrow f''(x) < 0 \therefore f(0) = -1 \text{ é máximo local}$$

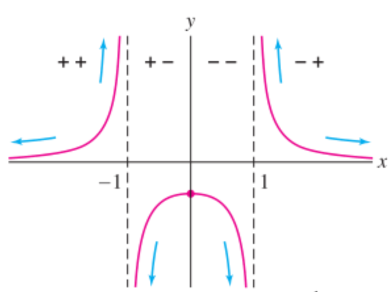
$$x < -1 \text{ ou } x > 1 \Longrightarrow x^2 - 1 > 0 \Longrightarrow f''(x) > 0$$

- Comportamento assintótico:

Já sabemos que $x = \pm 1$ são descontinuidades(assíntotas verticais). Agora,

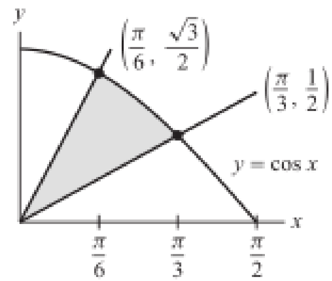
$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 0 \therefore \text{O eixo x é uma assíntota horizontal}$$

- Gráfico:



[1]

6. Calcule a área sombreada na figura abaixo:



Uma solução:

A equação da reta que passa pelos pontos $(0,0)$e $\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ é $y = \frac{3\sqrt{3}}{\pi}x$.

A equação da reta que passa pelos pontos $(0,0)$e $\left(\frac{\pi}{3}, \frac{1}{2}\right)$ é $y = \frac{3}{2\pi}x$.

A área sombreada à esquerda de $\frac{\pi}{6}$ é dada por:

$$A_1 = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \left[\frac{3\sqrt{3}}{\pi}x - \frac{3}{2\pi}x\right] dx = \left[\frac{3\sqrt{3}}{2\pi}x^2 - \frac{3}{4\pi}x^2\right]_0^{\frac{\pi}{6}} = \frac{3\sqrt{3}}{2\pi} \cdot \frac{\pi^2}{36} - \frac{3}{4\pi} \cdot \frac{\pi^2}{36} = \frac{\left(2\sqrt{3}-1\right)\pi}{48}$$

A área sombreada entre $\frac{\pi}{6}$ e $\frac{\pi}{3}$ é dada por:

$$A_2 = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \left[\cos x - \frac{3}{2\pi}x\right] dx = \left[\operatorname{sen} x - \frac{3}{4\pi}x^2\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} = \left[\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{4\pi} \cdot \frac{\pi^2}{9}\right] - \left[\frac{1}{2} - \frac{3}{4\pi} \cdot \frac{\pi^2}{36}\right] = \frac{8\sqrt{3} - \pi - 8}{16}$$

A área sombreada é dada por:

$$A = A_1 + A_2 = \frac{\left(2\sqrt{3}-1\right)\pi}{48} + \frac{8\sqrt{3} - \pi - 8}{16} = \frac{12\sqrt{3} - 12 + (\sqrt{3} - 2)\pi}{24}$$

Parte II - Assinale V(Verdadeiro) ou F(Falso) em apenas 4(quatro) das 5(cinco) afirmações abaixo e as justifique brevemente.

1. **(F)** Se os vetores não nulos u, v e w são linearmente dependentes, então w sempre é uma combinação linear de u e v.
   Justificativa: Considere $u = (9,6,0)$, $v = (3,2,0)$ e $w = (0,0,1)$ vetores em $\mathbb{R}^3$. Os vetores u, v e w são não nulos e são linearmente dependentes, pois
   $$\frac{1}{3}(9,6,0) - 1(3,2,0) + 0(0,0,1) = (0,0,0).$$
   Mas, w não é uma combinação linear de u e v. ■

2. **(V)** Toda equação separável $M(x) + N(y)\frac{dy}{dx} = 0$ também é exata.
   Justificativa: Para que a equação seja exata é necessário que $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ e, neste caso, temos: $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} = 0$. ■

3. **(F)** Se $G(x) = \int_4^x \sqrt{1+t^3}\ dt$, então $G'(4) = 0$.
   Justificativa: Pelo Teorema Fundamental do Cálculo, temos que $\mathrm{G}'(\mathrm{x}) = \sqrt{1+\mathrm{x}^3}$. Logo,
   $\mathrm{G}'(4) = \sqrt{65}$. ■

4. **(F)** Toda função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ contínua é diferenciável.
   Justificativa: A função $\mathrm{f(x)} = |\mathrm{x}|$ é contínua em todo o seu domínio. Contudo, f não é
   diferenciável em $\mathrm{x} = 0$. ■

5. **(F)** O S_5, o grupo simétrico de grau 5**,** possui um subgrupo de ordem 11.
   Justificativa: O Teorema de Lagrange diz: Se G é um grupo finito e H é um subgrupo de G, então a ordem de H divide a ordem de G. A ordem de S_5 é $5! = 120$ e 11 não divide 120. Logo S_5 não possui um subgrupo de ordem 11. ■

6. **(F)** Todo operador linear possui autovalores e autovetores.
   Justificativa: Considere $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ o operador linear definido por $T(x,y) = (-y,x)$. Se $c \in \mathbb{R}$ e $v = (x,y) \in \mathbb{R}^2$, com $v \neq (0,0)$, são tais que $T(x,y) = c(x,y)$, então
   $(-y,x) = c(x,y)$. Como $c \in \mathbb{R}$, concluímos que $y = 0$, o que ocasiona $x = 0$, mas $v \neq (0,0)$. Assim o operador linear T não tem autovalores nem autovetores. ■