EDITAL Nº 04/2016-PROGRAD

PROVA ESCRITA – ÁREA: FÍSICA GERAL

Questão 1.

(Valor 2,0) Um foguete modelo de 4,00 kg é lançado verticalmente para cima com velocidade inicial suficiente para atingir uma altura de 100 m, embora a resistência do ar realize –700 J de trabalho sobre o foguete. Determine a altura que o foguete teria ido se não houvesse resistência do ar. Use g = 9,80 m/s^2.

Questão 2.

(a) (Valor 1,5) Demonstre que o momento de inércia I de uma esfera sólida é dado por $I = \frac{2}{5}M.R^2$ (M é a massa da esfera e R seu raio), admitindo que gire em torno de um eixo passando pelo seu centro de massa. Considere constante a densidade de massa ρ da esfera. Lembre-se que $I = \int r^2 dm$, onde r é a distância perpendicular do elemento de massa dm ao eixo de rotação.

(b) (Valor 0,5) Considere que a Terra seja uma esfera sólida de densidade constante, com massa igual a 6,00 . 10^{24} kg e raio 6.400 km. Calcule o momento de inércia da Terra com relação ao eixo de rotação e sua respectiva energia cinética de rotação. Dê as respostas em unidades do Sistema Internacional (SI).

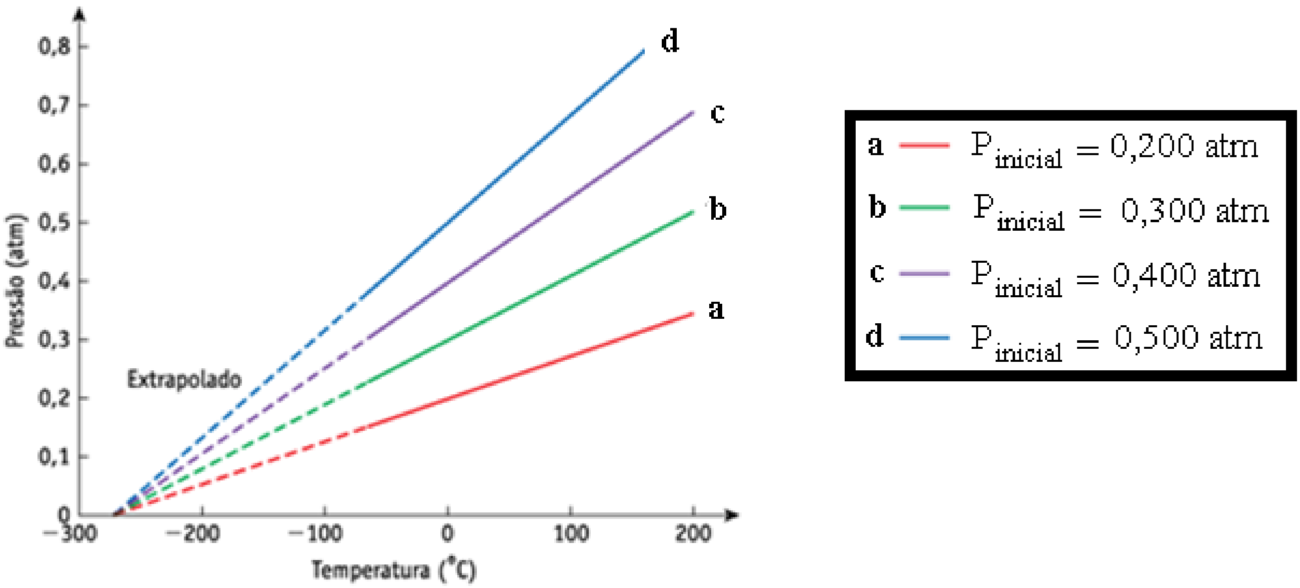
Questão 3.

(a) (Valor 1,5) Obtenha a solução para equação $\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$, onde $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$, em que m é massa do corpo preso numa extremidade da mola e k é a constante elástica da mola que tem comprimento ℓ, quando está em repouso. O corpo de massa m não sofre atrito do ar e se move sem atrito cinético sobre uma superfície. A outra extremidade da mola está presa a algum ponto fixo e a massa da mola é desprezível quando comparada à massa m do corpo.

(b) (Valor 0,5) Mostre que a energia mecânica do sistema físico especificado no item "a" depende apenas da amplitude e da constante elástica da mola.

Questão 4.

(Valor 2,0) Na figura abaixo, linhas contínuas representam o resultado de quatro experimentos (linhas **a**, **b**, **c** e **d**) realizados com um termômetro de gás a volume constante com diferentes pressões iniciais ($P_{inicial}$) a 0º C. Portanto, pressões medidas em volume fixo e em diferentes temperaturas podem ser expressas por uma relação linear, assumindo que os sistemas dos quatro experimentos se comportem como gases ideais. Uma extrapolação dessa relação, representada pelas linhas pontilhadas, busca estabelecer qual o valor mínimo de temperatura possível. Relacionando as definições de pressão e volume, explique por qual motivo esse valor não será atingido diminuindo gradualmente a quantidade do gás.



Questão 5

Considere as equações de Maxwell:

$$\oint \vec{E} \bullet d\vec{A} = \frac{q_{env}}{\varepsilon_0}$$

$$\oint \vec{B} \bullet d\vec{A} = 0$$

$$\oint \vec{E} \bullet d\vec{s} = -\frac{d\Phi_B}{dt}$$

$$\oint \vec{B} \bullet d\vec{s} = \mu_0 \left(i_{env} + \varepsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt} \right)$$

(a) (Valor 1,0) Explique o significado físico de cada uma delas.

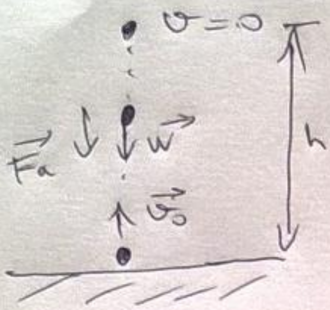
(b) (Valor 1,0) Mostre, usando as equações de Maxwell (na forma integral ou diferencial), que os campos elétrico e magnético de uma onda eletromagnética plana, não necessariamente monocromática, propagando-se no vácuo (numa região do espaço livre de cargas e correntes), são perpendiculares um ao outro e também perpendiculares à direção de propagação da onda.

EDITAL Nº 04/2016-PROGRAD

RESOLUÇÃO DA PROVA ESCRITA – ÁREA: FÍSICA GERAL

Questão 1 - (Valor 2,0).

Questão 1



$m = 4{,}00\ kg$

$h = 100\ m$

$W_a = -700\ J$

$g = 9{,}80\ m/s^2$

$h' = ?$ se $W_a = 0$

$$E_{mF} = E_{mi} + W_a \Rightarrow mgh = \frac{m v_0^2}{2} + W_a$$

$$\frac{m v_0^2}{2} = mgh - W_a \Rightarrow v_0^2 = 2\left(gh - \frac{W_{ar}}{m}\right)$$

$$v_0^2 = 2\cdot\left[9{,}8\cdot 100 - \frac{(-700)}{4}\right] = 2(980 + 175)$$

$$v_0^2 = 2310\ m^2/s^2$$

$$W_a = 0 \Rightarrow E_{mF} = E_{mi}$$

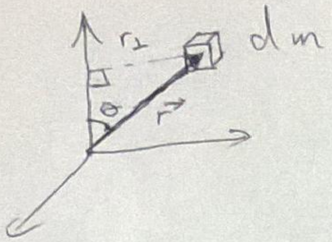
$$mgh' = \frac{m v_0^2}{2} \Rightarrow h' = \frac{v_0^2}{2g} = \frac{2310}{2\cdot 9{,}8}$$

$$h' = \frac{2310}{19{,}6} \Rightarrow h' = 118\ m$$

Questão 2 (a) - (Valor 1,5).

2) (a) $I = \int_m r_\perp^2 \, dm$ $\qquad dm = \rho \, dV$

$dV = r^2 \operatorname{sen}\theta \cdot dr \cdot d\theta \cdot d\phi$



$\operatorname{sen}\theta = \frac{r_\perp}{r} \Rightarrow r_\perp = r \operatorname{sen}\theta$

$$m = \rho \int_V dV = \rho \int_0^R r^2 dr \int_0^\pi \operatorname{sen}\theta \, d\theta \int_0^{2\pi} d\phi$$

$$\int_0^\pi \operatorname{sen}\theta \, d\theta = -\int_1^{-1} du = -u\Big|_1^{-1} = -(-1-1) = 2$$

$$\begin{cases} u = \cos\theta \\ du = -\operatorname{sen}\theta \, d\theta \end{cases}$$

$$m = \rho \cdot \frac{R^3}{3} \cdot 2 \cdot 2\pi \Rightarrow m = \frac{4\pi R^3}{3}\rho \Rightarrow \rho = \frac{3m}{4\pi R^3}$$

ou $\rho = \frac{3m}{4\pi R^3}$

$$I = \int_m r_\perp^2 \, dm = \int_V r^2 \operatorname{sen}^2\theta \, \rho \, dV$$

$$I = \rho \iiint r^2 \operatorname{sen}^2\theta \cdot r^2 \operatorname{sen}\theta \, dr \, d\theta \, d\phi$$

$$I = \rho \int_0^R r^4 dr \int_0^\pi \operatorname{sen}^3\theta \, d\theta \int_0^{2\pi} d\phi$$

$$\alpha = \int_0^\pi \operatorname{sen}^3\theta \, d\theta = \int_0^\pi \operatorname{sen}\theta \cdot \operatorname{sen}^2\theta \, d\theta = \int_0^\pi \operatorname{sen}\theta \cdot (1-\cos^2\theta) \, d\theta$$

$$\begin{cases} u = \cos\theta \\ du = -\operatorname{sen}\theta \, d\theta \end{cases}$$

$$\alpha = -\int_1^{-1} (1-u^2) \, du = \int_{-1}^{1} (1-u^2) \, du$$

$$\alpha = u\Big|_{-1}^{1} - \frac{u^3}{3}\Big|_{-1}^{1} = 2 - \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$$

$$I = \rho \, \frac{R^5}{5} \cdot \frac{4}{3} \cdot 2\pi = \frac{8\pi R^5}{15} \rho$$

$$I = \frac{8\pi R^5}{15} \cdot \frac{3m}{4\pi R^3} = \frac{2}{5} m R^2 \text{ ou } \boxed{I = \frac{2}{5} M R^2}$$

Questão 2 (b) - (Valor 0,5).

2) (b) $M = 6{,}00 \cdot 10^{24}$ kg , $R = 6400$ km $= 6{,}4 \cdot 10^{6}$ m

$$I = \frac{2}{5} M R^2 = \frac{2}{5} \cdot 6 \cdot 10^{24} \cdot (6{,}4 \cdot 10^{6})^2$$

$$I = 9{,}83 \cdot 10^{37} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

$$w = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{24 h} = \frac{2\pi}{24 \cdot 3600 \text{ s}} = \frac{\pi}{24 \cdot 1800}$$

$$w = \frac{\pi}{43200} \text{ rad/s}$$

$$K = \frac{I w^2}{2} = \frac{9{,}83 \cdot 10^{37}}{2} \cdot \frac{\pi^2}{(43200)^2}$$

$$K = 2{,}63 \cdot \pi^2 \cdot 10^{28} \text{ J}$$

Questão 3 (a) - (Valor 1,5)

A massa m passa oscilar em torno de $x_0 = l$, e a equação $\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x$, que é linear com coeficientes

constantes pode ser resolvida supondo que $x = e^{mt}$. Sendo assim, temos:

- $\frac{dx}{dt} = me^{mt}$
- $\frac{d^2x}{dt^2} = m^2 e^{mt}$.

Portanto, $m^2 = -\omega^2$, com as seguintes raízes:

- $m_1 = i\omega$
- $m_2 = -i\omega$.

A solução segue o caso de raízes reais e distintas e ela é formada pelas funções $\{e^{-i\omega t}, e^{i\omega t}\}$.

De tal forma, que a solução geral é

$$x(t) = a_1 e^{i\omega t} + a_2 e^{-i\omega t}.$$

Lembrando que $e^{\pm i\omega t} = \cos\omega t \pm i\sin\omega t$, segue que

$x(t) = a_1(\cos\omega t + i\sin\omega t) + a_2(\cos\omega t - i\sin\omega t)$

$= (a_1 + a_2)\cos\omega t + i(a_1 - a_2)\sin\omega t$

$x(t) = c_1\cos\omega t + c_2\sin\omega t$.

Uma vez que $\cos(a - b) = \cos a\cos b + \sin a\sin b$, se pode adotar que

- $c_1 = A\cos\delta$
- $c_2 = A\sin\delta$.

Então,

$x(t) = \mathrm{A}\cos\delta\cos\omega t + \sin\delta\sin\omega t$

$x(t) = A\cos(\omega t - \delta)$

.

Questão 3 (b) - (Valor 0,5)

A energia mecânica do sistema é definida como $E = \mathrm{K} + U$, onde

- Energia cinética - $\mathrm{K} = \frac{1}{2}mv^2$, sendo que $v = \frac{dx}{dt} = -\omega A\sin(\omega t - \delta)$ e $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$
- Energia potencial elástica da mola - $U = \frac{1}{2}kx^2$.

Portanto

$$E = \frac{1}{2}m\left(-\sqrt{\frac{k}{m}}\right)^2 (A\sin(\omega t - \delta))^2 + \frac{1}{2}k(A\cos(\omega t - \delta))^2$$

$$= \frac{1}{2}kA^2((\sin(\omega t - \delta))^2 + (\cos(\omega t - \delta))^2)$$

$$E = \frac{1}{2}kA^2$$

Questão 4 - (Valor 2,0).

Mantendo o volume do gás constante, a pressão do gás diminui gradativamente na medida em que a quantidade de massa do gás for diminuindo também, portanto não seria possível atingir o estado em que a pressão seria nula se não houve gás no bulbo, isto é, pressão nula e volume finito.

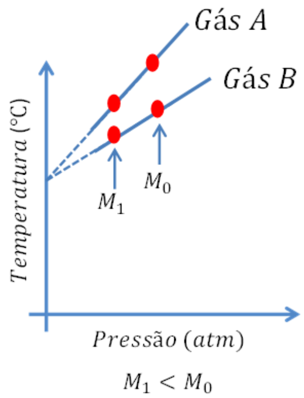


Figura 1. Para gases diferentes, as retas são diferentes, mas, se extrapolarmos ao limite, o que equivale considerar se não houvesse gás no bulbo, os resultados é que as retas convergem para um ponto no eixo das ordenadas.

Questão 5 (a) - (Valor 1,0)

- **Primeira Equação de Maxwell:**

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q_{env}}{\epsilon_0}. \tag{1}$$

Essa primeira equação estabelece que o fluxo do campo elétrico através de qualquer superficie fechada S é proporcional à carga q_{env}, contida no volume limitado pela superficie S.

- **Segunda Equação de Maxwell:**

$$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0. \tag{2}$$

O fluxo do campo magnético através de qualquer superficie fechada é sempre nulo. Segundo a equação (2), não existem fontes de campos magnéticos análogas às cargas elétricas, responsáveis pela geração de campos elétricos. Essas fontes, se existissem, seriam os famosos monopolos magnéticos.

- **Terceira Equação de Maxwell:**

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{s} = -\frac{d\Phi_B}{dt} = -\frac{d}{dt}\int_S \vec{B} \cdot d\vec{A}. \tag{3}$$

Na equação (3), o primeiro e o último termo representam, respectivamente, a força eletromotriz induzida numa curva arbitrária C e a taxa de variação temporal do fluxo magnético através de qualquer superficie S limitada pela curva C. Esta equação estabelece que se em uma região do epaço existe um campo magnético que varia temporalmente, este induzirá um campo elétrico.

- **Quarta Equação de Maxwell:**

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0(i_{env} + \epsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt}), \tag{4}$$

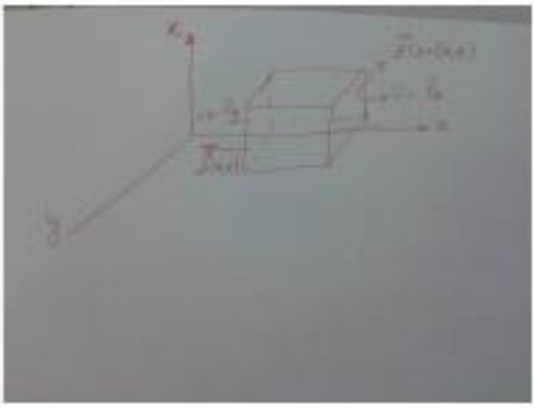
onde i_{env} é a corrente elétrica que atravessa qualquer superficie S limitada pela curva C e Φ_E é o fluxo do campo elétrico através da mesma superficie S. De acordo com esta última equação de Maxwell um campo magnético é produzido por uma corrente elétrica ou induzido pela existência de um campo elétrico temporalmente variável. A equação (4) se complementa com a equação (3) no sentido em que o campo magnético induzido pelo campo elétrico variável, em geral, será variável também, o que, por sua vez, induz um campo elétrico variável.

Questão 5 (b) - (Valor 1,0)

Considere uma onda eletromagnética plana, representada pelo seus campos elétrico $\vec{E}$ e magnético $\vec{B}$, propagandose na direção z. Pela natureza plana da onda, $\vec{E}$ e $\vec{B}$ unicamente dependerão espacialmente da cordenada z, ou seja $\vec{E} = \vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}(z, t)$ e $\vec{B} = \vec{B}(\vec{r}, t) = \vec{B}(z, t)$, onde a variável t representa o tempo. Por outro lado, no espaço livre, $q_{env} = 0$, com o que a equação (1) se reduz a

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{A} = \oint_S \vec{E} \cdot \hat{n} da = 0, \tag{5}$$

onde $\hat{n}$ é a normal unitária à superficie S e da é o elemento de área na superficie S. Para mostrar que $\vec{E}$ é perpendicular à direção de propagação, ou seja, à direção z escolhida arbitrariamente, consideremos o paralelepido, de dimensões infinitesimais δx, δy e δz da figura abaixo. Na figura, as faces do paralelepido são perpendiculares aos três eixos



cordenados x (normais $\hat{n} = \hat{e}_x$ e $\hat{n} = -\hat{e}_x$), y (normais $\hat{n} = \hat{e}_y$ e $\hat{n} = -\hat{e}_y$) e z (normais $\hat{n} = \hat{e}_z$ e $\hat{n} = -\hat{e}_z$). Na figura, por questões de clareza, unicamente são mostradas as normais $\hat{e}_z$ e $-\hat{e}_z$. Aplicando a equação (5) à superficie da figura encontrá-se que

$$\begin{aligned}
&[\vec{E}(x, y, z + \delta z, t) \cdot \hat{e}_z - \vec{E}(x, y, z, t) \cdot \hat{e}_z]\delta x \delta y + \\
&[\vec{E}(x + \delta x, y, z, t) \cdot \hat{e}_x - \vec{E}(x, y, z, t) \cdot \hat{e}_x]\delta z \delta y + \\
&[\vec{E}(x, y + \delta y, z, t) \cdot \hat{e}_y - \vec{E}(x, y, z, t) \cdot \hat{e}_y]\delta x \delta z = 0.
\end{aligned} \tag{6}$$

Como $\vec{E}(x, y, z, t) = \vec{E}(z, t)$, os termos no segundo e no terceiro colchetes são nulos, por tanto, dividindo o que restou da equação anterior por δz e tomando o limite

$\delta z \to 0$, encontramos que

$$\frac{\partial}{\partial z} E_z = 0, \tag{7}$$

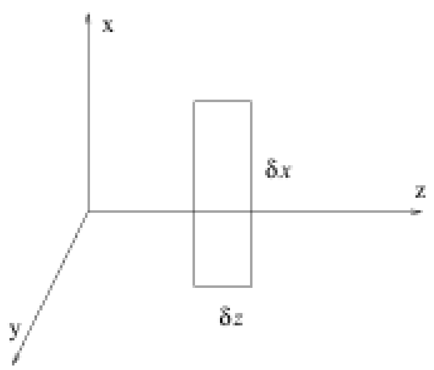
com o que a componente z, E_z, do campo elétrico é constante na cordenada z. Como estamos interesados unicamente em soluções ondulatórias das equações de Maxwell, $E_z = 0$, necessariamente. Com o que concluimos que a componente do campo elétrico de uma onda plana, ao longo da direção de propagação, é nula, ou seja, o campo elétrico é perpendicular à direção de propagação.

Usando a equação (2) e os mesmos argumentos usados para mostrar que o campo elétrico é perpendicular a direção de propagação mostrá-se que o campo magnético também é prependicular à direção de propagação.

Agora mostraremos que $\vec{E}$ e $\vec{B}$ são perpendiculares um ao outro, para isso, usaremos a equação (4) para o caso particular em que $i_{env} = 0$, com o que a equação (4) se reduz a:

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt} = \int_S \vec{E} \cdot \hat{n} da. \tag{8}$$

Como já foi mostrado acima que $\vec{E}$ é perpendicular à direção de propagação (z) escolhemos que a direção do campo elétrico $\vec{E}$ seja paralela ao eixo x. Para aplicar a equação anterior escolhemos um caminho retangular (percorrido em sentido antihorário) e infinitesimal paralelo ao plano xz de dimensões δx e δz, como mostrado na figura abaixo. Na superficie plana limitada pelo retângulo $\vec{E} \cdot \hat{n} = 0$ com o que



$$[B_x(z + \delta z) - B_x(z)]\delta x = 0. \tag{9}$$

A equação anterior implica que quando $\delta z \to 0$:

$$\frac{\partial}{\partial z} B_x = 0. \tag{10}$$

Portanto, a componente x, B_x do campo magnético é constante e igual a zero, se não for assim, o campo magnético não se propagaria como uma onda eletromagnética. Como $\vec{E}$ é paralelo ao eixo x e $B_x = 0$ concluimos que $\vec{E}$ é perpendicular a $\vec{B}$ para uma onda eletromagnética plana