

Área de concurso: **ÁREA 14 – ENGENHARIA ELÉTRICA – ÁREA DE CONTROLE E AUTOMAÇÃO**

GABARITO

Questão 1 (2,5 pts.) : Explique em detalhes como um sistema mecânico-elétrico pode ser modelado e como pode ser projetado um sistema de controle em malha fechada com emprego da resposta em frequência.

Resolução Questão 1:

2.2– Método Teórico para a Determinação de Modelos Matemáticos

Requerem aplicação de conhecimentos sobre as leis da Natureza. Para sistemas elétricos, as leis de Kirchoff, para sistemas mecânicos, as leis de Newton.

2.3– Modelos Matemáticos de Sistemas Mecânicos Lineares e Invariantes no Tempo

2.3.1– Sistemas Mecânicos Translacionais

As variáveis usadas são:

$x(t)$ = deslocamento

$\dot{x}(t) = v(t)$ = velocidade

$\ddot{x}(t) = \dot{v}(t) = a(t)$ = aceleração

$F(t)$ = força

Os elementos componentes dos sistemas mecânicos translacionais são:

1 - MASSA: Dado um corpo de massa M , da 2ª Lei de Newton temos:

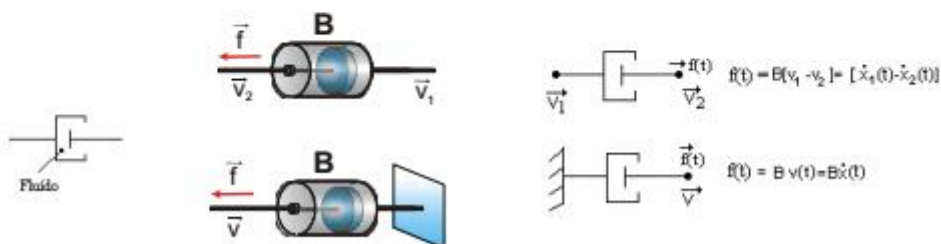


$f = \frac{d(mv)}{dt}$, ou seja, força é a variação da quantidade de movimento.

Se não houver variação da massa, podemos escrever:

$$f(t) = Ma(t) = M \dot{v}(t) = M \ddot{x}(t)$$

2 - ATRITO VISCOSO: Forças que são funções algébricas da velocidade entre dois pontos são modeladas por elementos de atrito viscoso (conhecido como amortecedor)



B: coeficiente de atrito viscoso

Representação simplificada

2.3.2 – Sistemas Mecânicos Rotacionais

As variáveis usadas são:

$\theta = \text{deslocamento angular}$

$\dot{\theta} = \omega = \text{velocidade angular}$

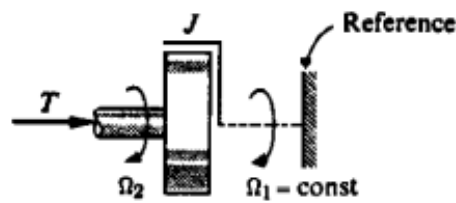
$\ddot{\theta} = \dot{\omega} = \alpha = \text{aceleração angular}$

$T = \text{torque}$

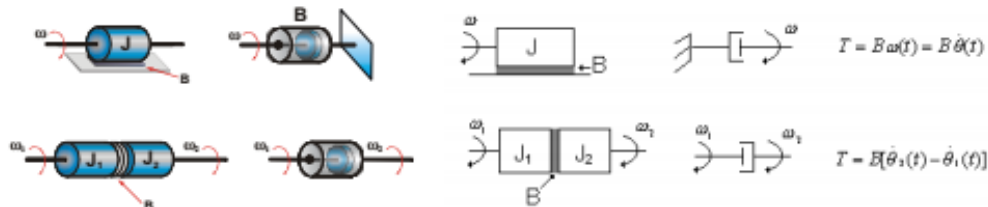
Os elementos componentes dos Sistemas Rotacionais são:

1 - Inércia: Dado um corpo de inércia J , a 2ª Lei de Newton estabelece que: $T(t) = \frac{d}{dt}[J\omega(t)]$,

caso não haja variação em J , resulta $T(t) = J \frac{d\omega(t)}{dt} = J\alpha(t) = J\ddot{\theta}(t)$

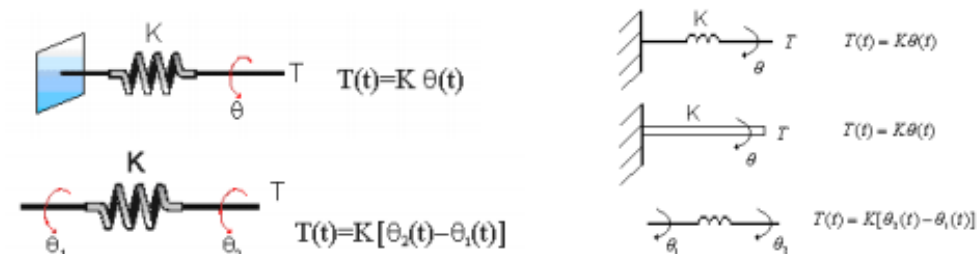


2 - Atrito Viscoso: O atrito viscoso de Rotação surge quando dois corpos, dos quais pelo menos um está em rotação, são separados por uma película de óleo, etc.



Representações simplificadas

3 - Mola de Torção: Componente no qual o torque é proporcional ao deslocamento angular:

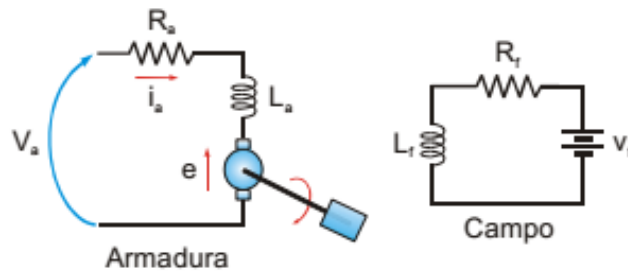


Representações simplificadas

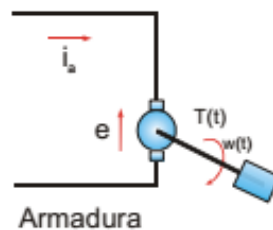
2.3.4 – Modelos Matemáticos de Sistemas Eletromecânicos

As interações entre as partes mecânica e elétrica são feitas por intermédio do campo elétrico e/ou magnético.

Exemplo 1: Servomotor DC com controle de Armadura (Corrente de Campo Constante)



- O fluxo magnético do motor é: $\phi(t) = K_1 i_f(t)$ $K_1 = cte$
- O torque mecânico resultante é: $T(t) = K_2 \phi(t) i_a(t)$ $K_m = K_2 \phi(t)$
- A força contra-eletromotriz é: $e(t) = K_3 \phi(t) \omega(t)$ $K_4 = K_3 \phi(t)$
- Admitindo que toda potência elétrica seja convertida em potência mecânica, então:



$$\begin{aligned}
 P_e &= i_a(t)e(t) \\
 P_m &= T(t)\omega(t) \quad \text{donde } K_m i_a(t)\omega(t) = K_4 i_a(t)\omega(t) \quad K_m = K_4 \\
 T(t)\omega(t) &= i_a(t)e(t)
 \end{aligned}$$

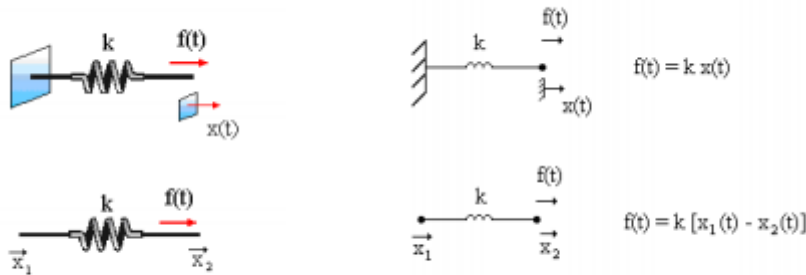
Finalmente pode-se escrever

$$\begin{cases}
 -v_a + R_a i_a(t) + L_a \frac{di_a(t)}{dt} + e(t) = 0 \\
 T(t) = J \frac{d\omega(t)}{dt} + B\omega(t)
 \end{cases}$$

E substituindo $T(t)$ e $e(t)$, temos:

$$\begin{cases}
 L_a \frac{di_a(t)}{dt} + R_a i_a(t) + K_m \omega(t) = v_a(t) \\
 J \frac{d\omega(t)}{dt} + B\omega(t) - K_m i_a(t) = 0
 \end{cases}$$

3 – Mola Ideal: obedece a Lei de Hooke



k : coeficiente de elasticidade da mola

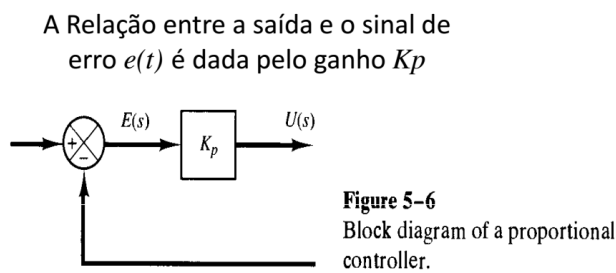
Representação simplificada

Projeto com resposta em frequência:

O desempenho de um sistema de controle pode ser descrito em termos de medidas de desempenho no domínio do tempo ou medidas de desempenho no domínio da frequência. O desempenho de um sistema de controle com realimentação em termos da medida de desempenho no domínio da frequência. Assim, um sistema pode ser descrito em termos do valor pico da resposta em frequência em malha fechada, da frequência de ressonância, da banda passante e da margem de fase de um sistema. Pode-se acrescentar uma estrutura de compensação adequada, se necessário, afim de satisfazer as especificações do sistema. O projeto da estrutura do controlador/compensador é desenvolvido em termos da resposta em frequência retratada no plano polar, nos diagramas de Bode ou Carta de Nichols.

Questão 2 (2,5 pts.) : Explique os procedimentos para o projeto de controlador PID para um sistema de segunda ordem.

✓ Controlador Proporcional

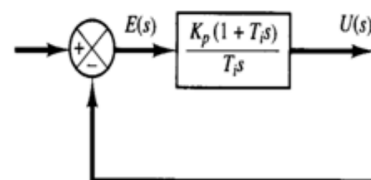


$$u(t) = K_p e(t)$$

$$\frac{U(s)}{E(s)} = K_p$$

Onde K_p é denominado Sensibilidade proporcional ou ganho

✓ Controlador PI



$$u(t) = K_p e(t) + \frac{K_p}{T_i} \int_0^t e(t) dt$$

$$\frac{U(s)}{E(s)} = K_p \left(1 + \frac{1}{T_i s} \right)$$

Onde:
 K_p é o ganho Proporcional
 T_i é o Tempo Integral.
 $(1/T_i - taxa de restabelecimento)$

✓ Controlador PD

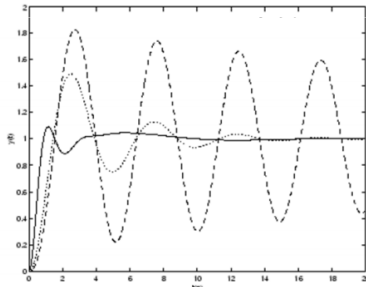
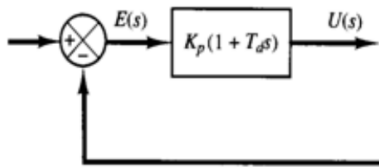
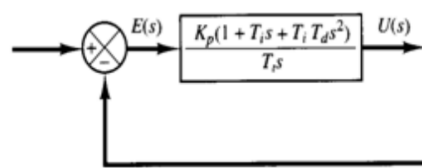


Figure 3.5: PID - $K_p=4$; $T_i=1.5$; $T_d=0.1$ (tracejado), 0.4 (pontilhado), 2(continuo)

✓ Controlador PID



$$u(t) = K_p e(t) + \frac{K_p}{T_i} \int_0^t e(t) dt + K_p T_d \frac{de(t)}{dt}$$

$$\frac{U(s)}{E(s)} = K_p \left(1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s \right)$$

Onde:

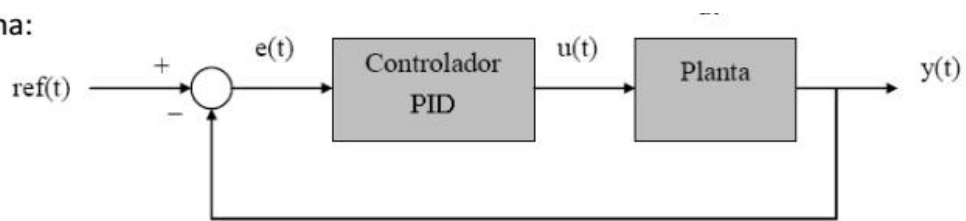
K_p é o ganho Proporcional

T_i é o Tempo Integral.

$(1/T_i$ - taxa de restabelecimento)

T_d é o Tempo Derivativo.

✓ Seja o sistema:



sendo

Planta (processo): Sistema físico a ser controlado;

Controlador: Elemento responsável pela excitação da planta.

onde defini-se os seguintes sinais:

$ref(t)$:= Sinal de referência;

$e(t)$:= Sinal de erro;

$u(t)$:= Sinal de controle;

$y(t)$:= Sinal de saída.

A função de transferência do controlador PID é apresentada da seguinte forma:

$$PID(s) = K_p + \frac{K_i}{s} + K_d \cdot s = \frac{K_d s^2 + K_p s + K_i}{s}$$

Características das Ações Proporcional, Integral e Derivativa

- ✓ O controle proporcional atua na resposta transitória do sistema de forma a diminuir o tempo de subida (t_r), diminuindo adicionalmente o erro de regime permanente.
- ✓ O controlador integral elimina por completo o erro de regime permanente, mas pode piorar a resposta transitória do sistema.
- ✓ A ação derivativa tem o efeito de aumentar a estabilidade do sistema, reduzindo o sobre-sinal e o tempo de estabilidade, com isso melhorando a resposta transitória.

Ganhos	Tempo de Subida (t_r)	Sobre-sinal (M_p)	Tempo de Estab. (t_s)	Erro de Regime (e_{ss})
K_p	Diminui	Aumenta	Pequena Alteração	Diminui
K_i	Diminui	Aumenta	Aumenta	Elimina
K_d	Pequena Alteração	Diminui	Diminui	Pequena Alteração

Para um sistema de segunda ordem: para projeto temos como características: Porcentagem de ultrapassagem, tempo de estabelecimento, tempo de subida e tempo pico. Considerando as ações proporcional, integral e derivativo, se escolhe o melhor controlador a ser utilizado (P, PI, PD, PID).

Questão 3 (2,5 pts.) : Explique os aspectos que devem ser considerados no projeto e implementação de um sistema de controle em malha fechada digital. Explique os métodos e materiais necessários para a implementação deste controlador.

Um sistema de controle digital é representado na Figura 1, na qual $r(t)$ é o sinal de referência desejado em tempo contínuo.

Para a implementação deste controlador se faz necessário: um ADC (Conversor Analógico em Digital), uP (Microcontrolador, DSP (*Digital Signal Processor*), etc.) e um DAC (Conversor Digital em Analógico).

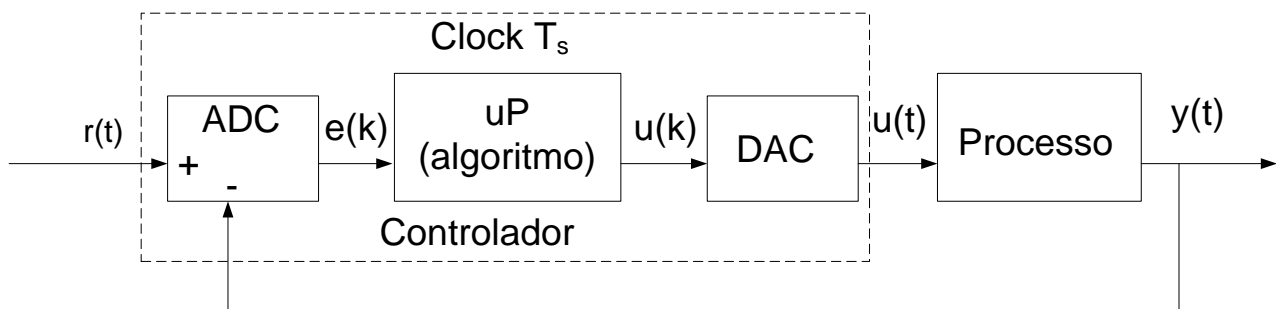


Figura1: Modelo de um sistema em laço fechado digital com realimentação unitária

Os tópicos que deverão ser abordados (aspectos) para a implementação do controlador digital são:

1. Relação entre a Transformada Z e a Transformada de Laplace.

A variáveis complexas z e s relacionam-se pela equação 1 em que T é o período de amostragem.

$$z = e^{sT} \quad (1)$$

Com essa relação de pode associar polos e zeros no plano z com a posição no plano s . tais polos e zeros são os mesmos da função de transferência pulsada.

Para sistemas de controle em tempo contínuo determina-se a estabilidade pela localização dos polos e zeros da função de transferência de malha fechada no plano s . De modo análogo, para sistemas de

controle discretos, a estabilidade é determinada observando-se a localização dos zeros e polos no plano z mas agora dependendo do período de amostragem.

2. Análise de estabilidade no plano Z.

Um sistema de controle com retroação linear e contínuo no tempo é estável se todos os polos da função de transferência a malha fechada $T(s)$ estiverem no semiplano s da esquerda. O plano z se relaciona com o plano s através da transformação:

$$z = e^{sT} = e^{(\sigma + j\omega)T} \quad (2)$$

Pode-se escrever esta relação como

$$|z| = e^{\sigma T} \quad (3)$$

e

$$\angle z = \omega T + 2k\pi \quad (4)$$

No semiplano s da esquerda, $\sigma < 0$, então a magnitude de z varia entre 0 e 1. Portanto, o eixo imaginário do plano s corresponde ao círculo unitário no plano Z e o interior do círculo unitário corresponde ao semiplano s da esquerda.

Pode-se enunciar, em consequência, que um sistema amostrado é estável se todos os polos da função de transferência a malha fechada $T(z)$ estiverem situados no interior do círculo unitário do plano z .

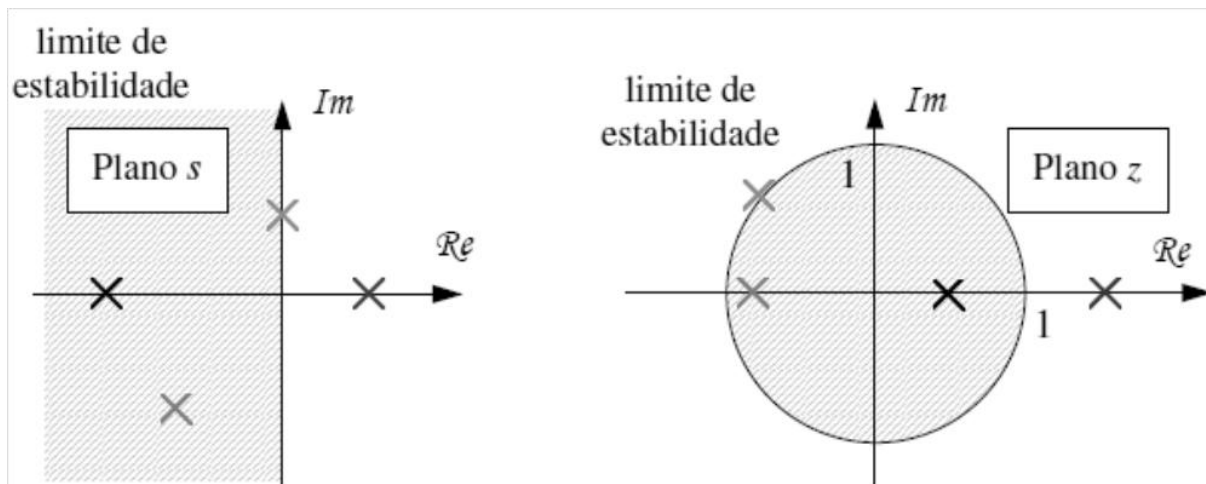


Figura 2: Relação entre o plano s e z

3. Critério de Routh

Não é possível aplicar diretamente o Critério de Routh a um sistema em tempo discreto, pois ele informa apenas a existência de raízes de um polinômio no semiplano direito. Para poder aplicar o Critério de Routh utiliza-se uma transformação que mapeia o círculo de raio unitário (em z) no semiplano esquerdo. Assim para a implementação digital de projetos analógicos tem-se:

Aproximações utilizadas (T pequeno)

1) Euler:

$$z = e^{sT} \cong 1 + sT \Rightarrow s' = \frac{z-1}{T}$$

2) Backward difference:

$$z = e^{sT} = \frac{1}{e^{-sT}} \cong \frac{1}{1-sT} \Rightarrow s' = \frac{z-1}{zT}$$

3) Transformada bilinear ou método trapezoidal (Tustin):

$$z = e^{sT} = \frac{e^{\frac{sT}{2}}}{e^{-\frac{sT}{2}}} \cong \frac{1 + \frac{sT}{2}}{1 - \frac{sT}{2}} \Rightarrow s' = \frac{2}{T} \cdot \frac{z-1}{z+1}$$

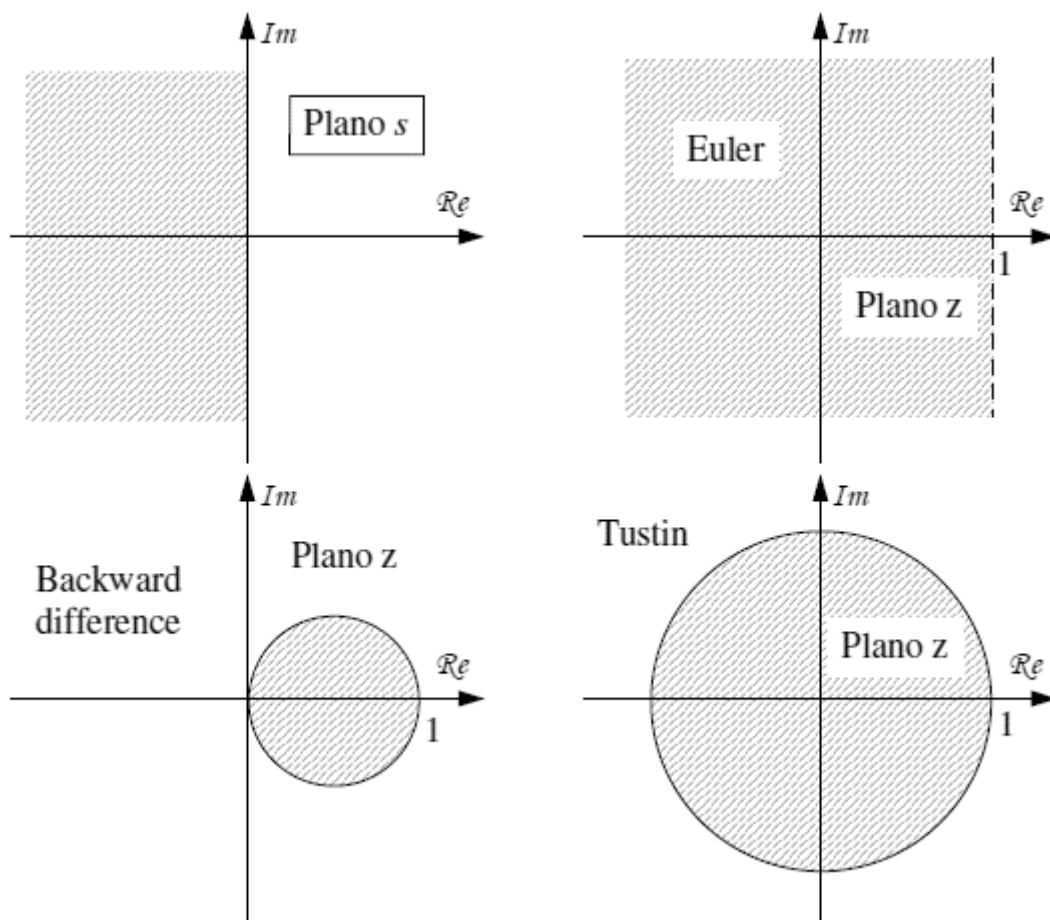


Figura 3: Aproximações utilizadas

A figura acima mostra o mapeamento do semiplano esquerdo de s no plano z , para cada uma das aproximações. Nota-se que, pela aproximação de Euler, os sistemas estáveis são mapeados no semiplano onde $\text{Re}(z) < 1$. Isso significa que modos estáveis em s podem ser mapeados em modos instáveis de z (fora do círculo de raio unitário).

No mapeamento por Backward difference, os modos estáveis sempre serão mapeados dentro do círculo de raio unitário (estarão dentro do círculo com diâmetro unitário e centro em $0.5 + j0$). Entretanto, existem modos instáveis em s que também serão mapeados dentro do círculo de raio unitário em z (e, portanto, estáveis).

Já na aproximação de Tustin, o semiplano esquerdo de s é mapeado exatamente no círculo de raio unitário em z . Além disso, este mapeamento fornece uma forma bastante adequada para a aplicação do Critério de Estabilidade de Routh

4. Critério de Jury

Um sistema de tempo discreto é dito estável, e a condição para um sistema com função de transferência $G(z)$ ser estável é que cada polo de $G(z)$ esteja dentro do círculo unitário no plano- z ou tenha magnitude menor que 1.

O processo em todo devera ser modelado em tempo discreto com

$$D(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_{n-1} z + a_n$$

Deve ser construído a seguinte tabela:

a_0	a_1	\dots	a_{n-1}	a_n	
a_n	a_{n-1}	\dots	a_1	a_0	$\alpha_n = \frac{a_n}{a_0}$
a_0^{n-1}	a_1^{n-1}	\dots	a_{n-1}^{n-1}		
a_{n-1}^{n-1}	a_{n-2}^{n-1}	\dots	a_0^{n-1}		$\alpha_{n-1} = \frac{a_{n-1}^{n-1}}{a_0^{n-1}}$
\vdots					
a_0^0					

A primeira linha é formada pelos coeficientes de $D(z)$;

A segunda linha é obtida invertendo-se a ordem da primeira; obtém-se, então, o termo α_n ;

A terceira linha é obtida multiplicando-se a segunda por α_n e subtraindo esse resultado da primeira (portanto o último elemento dessa linha é nulo);

A quarta linha é obtida invertendo-se a ordem da terceira;

O procedimento é repetido até a obtenção de $2n+1$ linhas (a última consistindo de apenas um termo).

Se $a_0 > 0$, então $D(z)$ tem todas as raízes dentro do círculo de raio unitário se, e somente se, todos os coeficientes a_0^k , $k = 0, 1, \dots, n-1$ forem positivos. Se nenhum a_0^k for zero, então o número de a_0^k , negativos é igual ao número de raízes fora do círculo de raio unitário.

5. Controle e Técnicas de Compensação

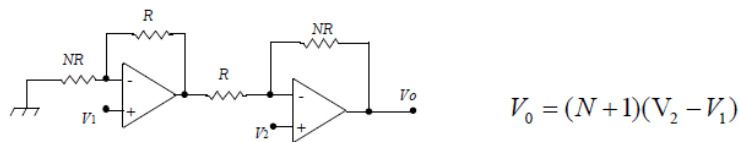
As técnicas usadas em tempo contínuo também são usadas em tempo discreto, como: Lugar Geométrico das Raízes para sinais em tempo discreto. A resposta em frequência (margem de fase e ganho), compensadores, e os mesmo método utilizado para sistemas em tempo contínuo para a obtenção geométrica dos pólos em malha fechada, a partir de seus polos e zeros em malha aberta, pode ser aplicado a sistemas em tempo discreto.

Questão 4 (2,5 pts.) : Comente e explique as técnicas e procedimentos necessários para aquisição e medição dos valores para a implementação de um sistema de controle digital.

Para a aquisição de valores num sistema de controle digital serão necessários sensores do tipo corrente, tensão temperatura, etc.

Estes sensores geralmente têm saída de tensão, ou quando construídos estão relacionados com a tensão/corrente. Uma vez feita a aquisição, a depender dos valores máximos e mínimos do sensor são necessários sistemas de condicionamento com amplificadores de instrumentação para atingir valores máximos e mínimos de conversores ADC (Conversor Analógico em Digital).

Para o projeto de amplificadores de instrumentação, podem ser usados topologias básicas de amplificadores operacionais ou topologias como mostrado nas figuras abaixo onde valores de N e N+1 vezes o valor da entrada são conseguidos.



Ex: LT1102 ()

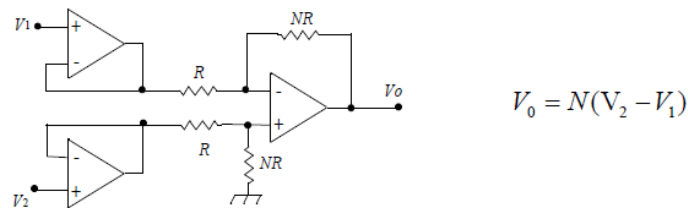


Figura4: Topologias de Amplificadores de instrumentação

Para medição do valor da referencia da entrada do controlador digital e a medição da grandeza para a realimentação se faz necessário escolher um ADC e, a depender da aplicação, considerar o seu número de bits (n) e tensão de referência (Vref), a fim de obter uma resolução ótima (Resolução $\approx V_{ref}/2^n$).

Outro aspecto que deve ser levado em consideração é a amostragem do sinal a qual dependerá da frequência máxima de amostragem do ADC e do sinal de referencia. Segundo Nyquist, para que seja possível reconstituir o sinal original é necessário que a frequência de amostragem seja, no mínimo, igual ao dobro da frequência máxima contida no sinal analógico. Como enuncia o teorema da amostragem: $f_{sam} \geq 2f_{sinal}$, sendo f_{sam} a frequência de amostragem e f_{sinal} a frequência de referência.

Ao intervalo de tempo entre amostras chama-se intervalo de amostragem, T_s . O seu inverso é a frequência de amostragem, $f_s = 1/T_s$ amostras por segundo. Caso contrário produz-se um fenômeno indesejável, denominado de aliasing, que se traduz numa sobreposição de espectro que inviabiliza a correta recuperação do sinal.

No caso de sensores de corrente, cuja saída seja corrente serão necessários sistemas de amplificadores de instrumentação e condicionamento de forma a transformar estes valores em valores de tensão. Sendo, assim, possível adquirir o valor da grandeza em tensão mediante um ADC.