UNIVERSIDADE FEDERAL DO ACRE-**UFAC**

Centro de Ciências Exatas e Tecnológicas - **ÁREA DE MATEMÁTICA**

PROVA ESCRITA - (Edital nº 04/2016)

GABARITO

Instruções:

1. Esta avaliação está impressa em 3 (três) folhas de papel A4 as quais estão anexadas 15 (quinze) folhas de papel destinadas às respostas definitivas e 10 (dez) folhas de papel que podem ser usadas para rascunho.

2. Todas as soluções e/ou justificativas devem ser escritas à caneta contendo tinta na cor azul ou preta.

3. A presente avaliação está composta por **3 partes**. O candidato deve observar as orientações relacionadas com cada uma delas abaixo.

PARTE I (AVALIADA EM 5,0 PONTOS) – Contém 8 (oito) problemas dos quais o candidato deve escolher e resolver 5 (cinco) deles.

PARTE II (AVALIADA EM 3,0 PONTOS) – Contém 6 (seis) lacunas seguidas de afirmações. O candidato deve escolher exatamente 3 (três) dessas e, conforme o seu julgamento que deve ser brevemente justificado, preencher com a letra **V**, caso a lacuna esteja seguida de uma afirmação **VERDADEIRA**, ou com a letra **F**, caso a lacuna esteja seguida de uma afirmação **FALSA**.

PARTE III (AVALIADA EM 2,0 PONTOS) – Contém um tema sobre o qual o candidato deve discorrer livremente.

PARTE I (AVALIADA EM 5,0 PONTOS)

PROBLEMA 1: Seja A um conjunto e $*$ uma operação definida em A. Considere em $\Im(A) = \{f: A \to A / f \text{ é } uma\ função\}$ a operação $\circledast$: $\forall\, f, g \in \Im(A)$, $f \circledast g$ é a função definida por

$$f \circledast g: A \to A$$
$$x \rightsquigarrow (f \circledast g)(x) = f(x) * g(x).$$

Mostre que:

a) se todos os elementos de A são idempotentes; então $\Im(A)$ possui um elemento idempotente.

b) se $*$ é associativa em A; então $\circledast$ também é associativa em $\Im(A)$.

SOLUÇÃO: a) Seja f um elemento em $\Im(A)$. Para todo x em A vale que $(f \circledast f)(x) = f(x) * f(x) = \left(f(x)\right)^2 = f(x)$. Isso mostra que $f \circledast f = f$ e, assim, f é um elemento idempotente em $\Im(A)$.

b) Vale que $[(f \circledast g) \circledast h](x) = (f \circledast g)(x) * h(x) = [f(x) * g(x)] * h(x)$. Como $*$ é associativa em A, temos que $[f(x) * g(x)] * h(x) = f(x) * [g(x) * h(x)] = f(x) * (g \circledast h)(x) = [f \circledast (g \circledast h)](x)$; $\forall\, x \in A$. Isso mostra que $(f \circledast g) \circledast h = f \circledast (g \circledast h)$ e $\circledast$ é associativa em $\Im(A)$.

PROBLEMA 2: Considere a função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \int_0^x \frac{sent}{1+t^2}dt$. Calcule o valor de $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x)}{x^2}$.

SOLUÇÃO: O limite procurado tem a forma $\frac{0}{0}$. Aplicando a regra de L'Hospital, $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x)}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{f'(x)}{2x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\frac{senx}{1+x^2}}{2x} = \lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{senx}{x} \cdot \frac{1}{2(1+x^2)}\right) = \left(\lim\limits_{x\to 0} \frac{senx}{x}\right)\left(\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{2(1+x^2)}\right)$ e assim, temos que $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x)}{x^2} = \frac{1}{2}$.

PROBLEMA 3: Sejam a e n números inteiros, ambos maiores que 1. Mostre que, se $a^n - 1$ é um número primo, então $a = 2$ e n é um número primo.

SOLUÇÃO: Suponha que $a > 2$. Assim, $a - 1 > 1$ e $a - 1$ divide $a^n - 1$, logo $a^n - 1$ não é primo, uma contradição, portanto $a = 2$.

Agora, suponha que n não é primo, daí $n = bc$, com $b > 1$ e $a > 1$. Como $2^b - 1$ divide $(2^b)^c - 1 = 2^n - 1$, segue que $2^n - 1$ não é primo, uma contradição, logo n é primo.

PROBLEMA 4: Seja $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ o espaço vetorial dos polinômios de grau ≤ 2 com coeficientes reais, juntamente com o polinômio nulo. Verifique se o operador linear $T: \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ definido por $T(p(t)) = p''(t) - 2p'(t) + p(t)$ é diagonalizável. Aqui, $p'(t)$ e $p''(t)$ são, respectivamente, as derivadas de primeira e segunda ordem de $p(t)$.

SOLUÇÃO: A matriz do operador T com relação à base canônica $\beta = \{1, t, t^2\}$ é igual a $[T]_\beta = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{3x3}$. Dessa forma, o polinômio característico de T é dado pela equação $p(\lambda) = det([T]_\beta - \lambda I) = (1-\lambda)^3$ e, assim, $\lambda = 1$ é o único autovalor de T. Ora, neste caso, T *é diagonalizável, se e somente se,* $dim\, V(1) = 3$, onde $V(1)$ é o autoespaço associado ao autovalor $\lambda = 1$. Vamos verificar a dimensão de $V(1)$. Temos:

$p(x) = a + bx + cx^2 \in V(1) \Leftrightarrow [T - \lambda I]_\beta\, [p(x)]_\beta = 0_{3\times 1} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow$ $b = c = 0 \Leftrightarrow p(x) = a$. Assim, $V(1)$ é gerado pelo polinômio constante 1, isto é, $dim\, V(1) = 1$ e daí T não é diagonalizável

PROBLEMA 5: Sejam a e b números inteiros positivos. Mostre que $\frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ é um número inteiro se, e somente se, $a = b = 1$ ou $a = b = 2$.

SOLUÇÃO: Suponha que $\frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ é um número inteiro. Como $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{a+b}{ab}$, necessariamente ab divide $a + b$, mas a divide ab, logo $\boldsymbol{a}$ **divide** $\boldsymbol{b}$. Analogamente, b divide ab e daí, $\boldsymbol{b}$ **divide** $\boldsymbol{a}$. Como a e b são números inteiros positivos, segue que $a = b$. Usando este resultado, temos que $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{a+b}{ab} = \frac{2a}{a^2} = \frac{2}{a}$, daí segue que $a = 1$ ou $a = 2$. Agora, se $a = b = 1$ ou $a = b = 2$, temos $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 1 + 1 = 2$ ou $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$.

PROBLEMA 6: Sejam y_1 e y_2 duas soluções da equação diferencial

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = 0;$$

onde p e q são contínuas em um intervalo aberto $I \subset \mathbb{R}$. Mostre que:

a) o wronskiano $w(y_1, y_2)\,(t)$ é dado por $w(y_1, y_2)(t) = ce^{\int -p(t)dt}$; onde c é uma constante independente de t, mas que depende de y_1 e y_2.

b) $w(y_1, y_2)\,(t)$ nunca se anula ou é identicamente nulo no intervalo I.

SOLUÇÃO: Vale que $\begin{cases} y''_1 + p(t)y'_1 + q(t)y_1 = 0 \\ y''_2 + p(t)y'_2 + q(t)y_2 = 0 \end{cases}$; já que y_1 e y_2 são soluções da equação dada. Equivalentemente, vale que

$$(*): (y_1 y''_2 - y''_1 y_2) + p(t)(y_1 y'_2 - y'_1 y_2) = 0.$$

Por definição, temos $W(y_1, y_2) = y_1 y'_2 - y'_1 y_2$. Então, vale que

$$W' = y'_1 y'_2 + y_1 y''_2 - y''_1 y_2 - y'_1 y'_2 = y_1 y''_2 - y''_1 y_2.$$

Desse modo $(*)$ pode ser escrita como

$W' + p(t)W = 0 \Rightarrow \frac{W'}{W} = -p(t) \Rightarrow lnW = \int -p(t)dt \Rightarrow W(t) = ce^{-\int p(t)dt}$; onde $c = tp$; o que mostra que $W(t) \neq 0$, a menos que tenhamos $c = 0$ e, nesse caso, temos $W(t) = 0$ para todo t.

PROBLEMA 7: Considere o anel dos números inteiros $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$. Mostre que, se a função $f: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ satisfaz as condições:
i) $f(m+n) = f(m) + f(n)$ e
ii) $f(mn) = f(m)f(n)$;
então, $f \equiv 0$ é a função nula ou $f = i_{\mathbb{Z}}$ é a função identidade em $\mathbb{Z}$.

SOLUÇÃO: Temos que $1^2 = 1.1 = 1$. Usando a hipótese do item ii), vemos que $f(1.1) = f(1) \Leftrightarrow f(1)f(1) = f(1) \Leftrightarrow f(1)f(1) - f(1) = 0 \Leftrightarrow f(1)[f(1) - 1] = 0$. Como $\mathbb{Z}$ é um anel íntegro, temos que $f(1) = 0$ ou $f(1) - 1 = 0 \Leftrightarrow f(1) = 1$.

Se $f(1) = 0$, vale que $f(x) = f(1.x) = f(1)f(x) = 0f(x) = 0$; $\forall\, x \in \mathbb{Z}$. Nesse caso, vale que $f \equiv 0$ é a função nula.

Se $f(1) = 1$, $\forall\, 0 < x \in \mathbb{Z}$, vale que $f(x) = f(1.x) = f(1 + 1 + \cdots + 1)$; onde f age em x parcelas iguais a 1. Usando a hipótese em i), temos $f(1 + 1 + \cdots + 1) = f(1) + f(1) + \cdots + f(1) = f(1).x = 1.x = x$. Além disso, $\forall\, 0 > x \in \mathbb{Z}$, temos que $0 < -x$ e, pelo caso anterior, vale que $f(-x) = -x$. Portanto, se $f(1) = 1$, vale que $f = i_{\mathbb{Z}}$ é a função identidade em $\mathbb{Z}$.

PROBLEMA 8: Seja $f: [a,b] \times [c,d] \to \mathbb{R}$ dada por $f(t,x) = g(t)\, h(x)$ com g e h contínuas e $h(x) \neq 0$, $\forall\, x \in [c,d]$. Considere $\varphi: I \to \mathbb{R}$ a solução geral do problema de Cauchy $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(t,x) \\ \varphi(t_0) = x_0 \end{cases}$. Mostre que $\varphi(t) = H^{-1}\left(\int_{t_0}^{t} g(r)dr\right)$; onde temos $H(x) := \int_{x_0}^{x} \frac{1}{h(r)} dr$. (Essa é a chamada solução geral da correspondente equação a variáveis separáveis).

SOLUÇÃO: Sendo φ solução, temos: $\frac{d\varphi}{dt} = g(t) \cdot h(\varphi(t))$; $\varphi(t_0) = t_0$. Portanto, vale que $(*)$: $\frac{1}{h(\varphi(t))} \cdot \frac{d\varphi(t)}{dt} = g(t)$.

Pela definição de H, usando a regra da cadeia, reescrevemos a igualdade em $(*)$ como $(H \circ \varphi)'(t) = g(t)$. Pelo T.F.C, integrando a igualdade acima de t_0 a t, obtemos que

$$(**): H(\varphi(t)) - H(\varphi(t_0)) = \int_{t_0}^{t} g(r)dr \Leftrightarrow H(\varphi(t)) = H(x_0) + \int_{t_0}^{t} g(r)dr = \int_{t_0}^{t} g(r)dr$$

Então, note que $\frac{1}{h}$ é a derivada de H, e não muda de sinal, segue-se que H é estritamente monótona. Portanto, $H([c,d])$ é um intervalo contendo x_0 e existe a inversa $H^{-1}: H([c,d]) \longrightarrow [c,d]$. Compondo H^{-1} e $(**)$, obtemos, então, que $\varphi(t) = H^{-1}\left(\int_{t_0}^{t} g(r)dr\right)$.

PARTE II (AVALIADA EM 3,0 PONTOS)

AFIRMAÇÃO 1: (**F**) A sequência $x_n = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} i$ converge para 1.

JUSTIFICATIVA: Temos $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n^2+n}{2}$ (mostra − se por indução). Daí, vemos que $x_n = \left(\frac{1}{n^2}\right)\left(\frac{n^2+n}{2}\right) = \frac{1}{2}(1+\frac{1}{n}) \to \frac{1}{2}$. Portanto, a afirmação é Falsa!

AFIRMAÇÃO 2: (**V**) Se $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ é a matriz que representa o operador linear $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ (com relação a alguma base de $\mathbb{R}^2$); então vale que T é diagonalizável.

JUSTIFICATIVA: Como a matriz $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ é simétrica e $\mathbb{R}^2$ é um espaço com produto interno, temos que o operador linear T é auto adjunto. Assim, vai existir uma base ortonormal de autovetores de T, e isto quer dizer que T é diagonalizável.

AFIRMAÇÃO 3: (**V**) No anel $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ dos números inteiros todo ideal $p\mathbb{Z}$, com p primo, é maximal.

JUSTIFICATIVA: Seja I um ideal de $\mathbb{Z}$. Como $\mathbb{Z}$ é um domínio de ideais principais, vale que $I = n\mathbb{Z}$, para algum inteiro n. Se tivermos $p\mathbb{Z} \subset I = n\mathbb{Z} \subset \mathbb{Z}$, existe um inteiro a tal que $p = na$. Como p é primo, temos $n = \pm 1$ ou $n = \pm p$. Isso mostra que $I = p\mathbb{Z}$ ou $I = \mathbb{Z}$, o que mostra que $p\mathbb{Z}$ é maximal.

AFIRMAÇÃO 4: (**F**) Considere a função contínua dada por

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) &\rightsquigarrow f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{4x^2y}{x^2+y^2}, & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases} \end{aligned}$$

Então, vale que $f_x(0,0)$ existe e f_x é contínua em $(0,0)$.

JUSTIFICATIVA: Temos $f_x(0,0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x, 0) - f(0,0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{0-0}{\Delta x} = 0$. Assim, f_x $(0,0)$ existe.

Agora, se $(x,y) \neq (0,0)$, temos

$$f_x = \frac{8xy(x^2+y^2) + 3x^2y2x}{(x^2+y^2)^2} = \frac{8xy^3}{(x^2+y^2)^2}.$$

Para $S_1 = \{(x,0); x \in \mathbb{R}\}$, temos $f_x \underset{S_1}{\to} 0$. E para $S_2 = \{(x,x); x \in \mathbb{R}\}$, temos $f_x \underset{S_2}{\to} 2$. Portanto, $\nexists \lim_{(x,y)\to(0,0)} f_x$ e assim, f_x não é contínua em $(0,0)$.

AFIRMAÇÃO 5: (**F**) Se $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ é uma função de uma variável complexa, definida por $f(z) = \bar{z} + 2$, então f é analítica.

JUSTIFICATIVA: Escrevendo $f(z) = \bar{z} + 2 = u(x,y) + iv(x,y) = (x+2) + i(-y)$. Vemos que as derivadas parciais de $u(x,y)$ e $v(x,y)$ com relação a x e y são $\frac{\partial u}{\partial x} = 1$, $\frac{\partial u}{\partial y} = 0$, $\frac{\partial v}{\partial x} = 0$ e $\frac{\partial v}{\partial y} = -1$. Assim, as condições de Cauchy-Riemann $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$ e $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$ não são satisfeitas, independentemente dos valores de x e y. Então, f não é derivável em qualquer ponto do plano complexo. Consequentemente, f não é analítica.

AFIRMAÇÃO 6: (**F**) Seja G um grupo. Sejam H e K são subgrupos de G. Então, em geral, vale que $H \cup K \leq G$.
JUSTIFICATICA: Considere, em $\mathbb{R}^3$, os subconjuntos $H = \{(x,0,0)/x \in \mathbb{R}\}$ e $K = \{(0,y,0)/y \in \mathbb{R}\}$ e a operação usual de adição, por exemplo. Vale que H e K são subgrupos de $\mathbb{R}^3$. No entanto, a união $H \cup K$ contém os vetores $u = (1,0,0)$ e $v = (0,1,0)$ mas, $u + v = (1,1,0) \notin H \cup K$. Isso mostra que esse conjunto união não é "fechado" para a adição definida em $\mathbb{R}^3$. Consequentemente, $H \cup K$ não é um subespaço de $\mathbb{R}^3$.

PARTE III (AVALIADA EM 2,0 PONTOS)

TEMA PARA DISSERTAÇÃO: Critérios de Convergência de Séries Numéricas.

CHAVE DE CORREÇÃO: Para obter a pontuação máxima nessa parte da avaliação o candidato deve:

1. Definir série.
2. Definir série convergente.
3. Exibir pelo menos 3 (três) critérios de convergência.
4. Dar exemplos da aplicação dos critérios enunciados no item 3, discutindo a convergência de determinadas série numéricas.