CONCURSO PÚBLICO DE PROVAS E TÍTULOS PARA O CARGO EFETIVO DE PROFESSOR DA CARREIRA DE MAGISTÉRIO SUPERIOR – EDITAL Nº 28/2023 – PROGRAD

FOLHA DE QUESTÕES

Área: **Número de C.P.F**___________________________

QUESTÃO 01: (1,5 PONTO) Um dos ramos da Estatística envolve a técnica de planejamento de experimentos, sendo um dos componentes curriculares obrigatórios nos cursos de Ciências Agrárias da UFAC. Deste modo, elabore um texto dissertativo sobre o tema "Delineamento em Blocos Casualizados", destacando:

a) **(0,4 PONTO)** os princípios básicos da experimentação;
b) **(0,4 PONTO)** o modelo estatístico e suas pressuposições;
c) **(0,7 PONTO)** o procedimento geral para testar a hipótese de igualdade de médias dos tratamentos.

CHAVE DE CORREÇÃO

Elaborou um texto dissertativo sobre o tema "Delineamento em Blocos Casualizados", abordando

a) corretamente os princípios básicos da experimentação utilizados no DBC – 0,4 pontos;
b) especificou corretamente o modelo e suas pressuposições – 0,4 pontos;
c) Descreveu corretamente o procedimento para testar a hipótese de igualdade de médias dos tratamentos no DBC – 0,7 pontos.

QUESTÃO 02: (1,5 PONTO) A Amostragem é a parte da Teoria Estatística que estuda os procedimentos para seleção de uma amostra. Basicamente, um plano de amostragem deve conter a forma de seleção dos elementos da população e o tamanho da amostra.

a) **(0,8 PONTO)** Apresente, de forma resumida, as principais técnicas de amostragem probabilística.
b) **(0,7 PONTO)** Mostre como determinar o tamanho de uma amostra para estimar a média populacional considerando variância conhecida e a seleção por amostragem aleatória simples com reposição.

CONCURSO PÚBLICO DE PROVAS E TÍTULOS PARA O CARGO EFETIVO DE PROFESSOR DA CARREIRA DE MAGISTÉRIO SUPERIOR – EDITAL Nº 28/2023 – PROGRAD

FOLHA DE QUESTÕES

Área: **Número de C.P.F**___________________________

CHAVE DE CORREÇÃO

a) Apresentou corretamente, e de forma resumida, as técnicas de amostragem probabilística: aleatória simples, sistemática, estratificada e conglomerados – 0,8 pontos;

b) Considere o seguinte resultado:

Sejam $X_1, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória simples de tamanho n de uma população normal com média μ (desconhecida) e variância σ^2 (conhecida), então

$$Z = \frac{\sqrt{n}(\bar{X} - \mu)}{\sigma} \sim N(0,1).$$

Se a distribuição de X não é normal, o resultado acima é válido aproximadamente quando o tamanho da amostra é grande (Teorema Central do Limite).

Fixando um coeficiente de confiança $1-\alpha$ tal que $0 < 1-\alpha < 1$, pode-se determinar $z_{\frac{\alpha}{2}}$ consultando a tabela da normal padrão tal que $P(-z_{\frac{\alpha}{2}} < Z < z_{\frac{\alpha}{2}}) = 1-\alpha$. Sendo assim, tem-se

$$P(-z_{\frac{\alpha}{2}} < Z < z_{\frac{\alpha}{2}}) = 1-\alpha \quad \Leftrightarrow \quad P\left(-z_{\frac{\alpha}{2}} < \frac{\sqrt{n}(\bar{X} - \mu)}{\sigma} < z_{\frac{\alpha}{2}}\right) = 1-\alpha$$

$$\Leftrightarrow P\left(-z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \bar{X} - \mu < z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 1-\alpha \quad \Leftrightarrow P\left(\bar{X} - z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{X} + z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 1-\alpha$$

Portanto, um intervalo de confiança (IC) de $100(1-\alpha)\%$ para a média μ é dado por:

$$IC_{100(1-\alpha)\%}(\mu) = \left[\bar{X} - z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{X} + z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right] = [\bar{X} - E, \bar{X} + E]$$

sendo que $E = z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ é o erro máximo. Assim, dado um valor preestabelecido para o erro máximo (E), fixado um nível de confiança $1-\alpha$ e valor conhecido de σ, podemos determinar o tamanho amostral mínimo para estimarmos a média populacional μ, usando a seguinte fórmula:

$$E = z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \quad \Leftrightarrow \quad n = \left(\frac{z_{\frac{\alpha}{2}} \times \sigma}{E}\right)^2,$$

onde $z_{\frac{\alpha}{2}}$ é o valor crítico da distribuição normal padrão cuja área superior é $\frac{\alpha}{2}$.

CONCURSO PÚBLICO DE PROVAS E TÍTULOS PARA O CARGO EFETIVO DE PROFESSOR DA CARREIRA DE MAGISTÉRIO SUPERIOR – EDITAL Nº 28/2023 – PROGRAD

FOLHA DE QUESTÕES

Área: **Número de C.P.F**___________________________

QUESTÃO 03: (1 PONTO) Suponha que duas fábricas fornecem lâmpadas fluorescentes para o mercado. As lâmpadas fluorescentes da fábrica Y funcionam mais de 8.000 horas em 80% dos casos, enquanto as lâmpadas fluorescentes da fábrica Z funcionam mais de 8.000 horas em 90% dos casos. Sabe-se que a fábrica Y fornece 70% do total de lâmpadas fluorescentes disponíveis no mercado, enquanto a fábrica Z fornece 30% de lâmpadas. Se aleatoriamente compra-se uma lâmpada fluorescente no mercado, então:

a) **(0,5 PONTO)** qual a probabilidade de uma lâmpada fluorescente comprada funcionar por mais de 8.000 horas?
b) **(0,5 PONTO)** Sabendo que funciona mais de 8.000 horas, qual a probabilidade da lâmpada fluorescente comprada ter vindo da fábrica Z?

CHAVE DE CORREÇÃO

a) Seja F: o evento em que uma lâmpada fluorescente funciona mais de 8.000 horas,

Y: o evento em que uma lâmpada fluorescente vem da fábrica Y e

Z: o evento em que uma lâmpada fluorescente vem da fábrica Z.

Do enunciado, extrai-se as informações: $P(F|Y) = 0{,}80$, $P(F|Z) = 0{,}90$, $P(Y) = 0{,}70$ e $P(Z) = 0{,}30$

Então pela Lei da probabilidade total, tem-se:

$$P(F) = P(F|Y)P(Y) + P(F|Z)P(Z) = 0{,}8 \times 0{,}7 + 0{,}9 \times 0{,}3 = 0{,}56 + 0{,}27 = 0{,}83.$$

b)

$$P(Z|F) = \frac{P(F|Z)P(Z)}{P(F)} = \frac{0{,}9 \times 0{,}3}{0{,}83} = \frac{0{,}27}{0{,}83} = \frac{27}{83} \text{ ou } \approx 0{,}325$$

CONCURSO PÚBLICO DE PROVAS E TÍTULOS PARA O CARGO EFETIVO DE PROFESSOR DA CARREIRA DE MAGISTÉRIO SUPERIOR – EDITAL Nº 28/2023 – PROGRAD

FOLHA DE QUESTÕES

Área: **Número de C.P.F**__________________________

QUESTÃO 04: (1 PONTO) Considere n realizações independentes de um mesmo experimento aleatório. Cada realização admite apenas dois possíveis resultados: sucesso, com probabilidade p, e fracasso, com probabilidade q, $p + q = 1$, com as probabilidades mantendo-se constantes em cada realização. Seja Y a variável aleatória que representa o número total de sucessos em n realizações do experimento:

a) **(0,4 PONTO)** Mostre que a variável aleatória Y tem distribuição binomial com parâmetros n e p.

b) **(0,3 PONTO)** Utilizando as propriedades da esperança matemática e variância, encontre a média e a variância de Y.

c) **(0,3 PONTO)** Suponha que temos interesse na variável aleatória P, que representa a proporção de sucessos em n realizações do experimento, encontre a média e a variância de P.

CHAVE DE CORREÇÃO

a) Inicialmente, vamos considerar uma única repetição do experimento, ou seja, $n = 1$, em que temos dois possíveis resultados: sucesso (S), com probabilidade p, e fracasso (F), com probabilidade $q = 1 - p$. Associado ao experimento, podemos definir uma variável aleatória (v.a.) X, que assume apenas dois valores: 1, se ocorrer sucesso, e 0, se ocorrer fracasso. Nessas condições, dizemos que X tem distribuição de Bernoulli com probabilidade p, e sua função de probabilidade é dada por: $P(X = x) = p^x q^{1-x}$, em que $x = 0$ ou 1.

Se considerarmos duas repetições independentes desse mesmo experimento $(n = 2)$, teremos os seguintes resultados: SS, SF, FS ou FF. Por independência, as respectivas probabilidades serão: p^2, pq, qp, q^2. Se considerarmos, por exemplo, a ocorrência do evento "somente um sucesso", a probabilidade será: $P(SF \text{ ou } FS) = pq + qp = 2pq$. Tal probabilidade pode ser reescrita como $2pq = \binom{2}{1} p^1 q^{2-1}$ em que $\binom{2}{1}$ é a combinação de 2 (duas repetições do experimento), tomados 2 a 1 (ocorreu um sucesso); a qual indica o número de sequências diferentes, e os expoentes indicam, respectivamente, o número de sucessos e o de fracassos, sendo esse último obtido pela diferença entre

CONCURSO PÚBLICO DE PROVAS E TÍTULOS PARA O CARGO EFETIVO DE PROFESSOR DA CARREIRA DE MAGISTÉRIO SUPERIOR – EDITAL Nº 28/2023 – PROGRAD

FOLHA DE QUESTÕES

Área: **Número de C.P.F**___________________________

o número de repetições e o número de sucessos. Usamos combinações pois a ordem dos resultados não importa.

Generalizando para n repetições independentes desse mesmo experimento, um resultado particular será: $\underbrace{SSS \dots S}_{k}\underbrace{FFF \dots F}_{n-k}$, e a probabilidade de tal sequência ocorrer será:

$$P(SSS \dots SFFF \dots F) = \underbrace{p \cdot p \cdot p \cdot \dots \cdot p}_{k} \cdot \underbrace{q \cdot q \cdot q \cdot \dots \cdot q}_{n-k} = p^k q^{n-k}.$$

Para qualquer sequência com k sucessos e $n-k$ fracassos, a probabilidade será sempre a mesma acima. Resta saber a quantidade de sequências diferentes que podem ser formadas, a qual é dada por

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!},$$

ou seja, a probabilidade de k sucessos em n repetições do experimento será:

$$P(Y = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}, \qquad k = 0,1,2,\dots,n.$$

Os possíveis valores de $k = 0,1,2,\dots,n$ e as probabilidades $P(Y = k)$ constituem a chamada distribuição binomial, com parâmetros n e p.

b) Uma variável aleatória binomial Y é a soma de n variáveis independentes do tipo Bernoulli, ou seja,

$$Y = X_1 + X_2 + \cdots + X_n,$$

em que cada X_i tem distribuição Bernoulli com probabilidade de sucesso p.

Aplicando as propriedades da esperança matemática e variância, e lembrando que $E(X_i) = p$ e $Var(X_i) = pq$, onde $q = 1 - p$, temos:

$$E(Y) = E(X_1 + X_2 + \cdots + X_n)$$
$$E(Y) = E(X_1) + E(X_2) + \cdots + E(X_n)$$
$$E(Y) = p + p + \cdots + p = np$$

A variância será:

$$Var(Y) = Var(X_1 + X_2 + \cdots + X_n)$$

como os (X_i's) são independentes, a variância de uma soma de variáveis aleatórias é a soma das variâncias dessas variáveis, então: