CONCURSO PÚBLICO DE PROVAS E TÍTULOS PARA O CARGO EFETIVO DE PROFESSOR DA CARREIRA DE MAGISTÉRIO SUPERIOR – EDITAL Nº 28/2023 – PROGRAD

FOLHA DE QUESTÕES

Área: **Número de C.P.F**____________________________

$$Var(Y) = Var(X_1) + Var(X_2) + \cdots + Var(X_n)$$

$$Var(Y) = pq + pq + \cdots + pq = npq$$

c)

Seja a variável aleatória P definida como $P = \frac{Y}{n}$, em que Y tem distribuição Binomial com $E(Y) = np$ e $Var(Y) = npq$. Assim,

$$E(P) = E\left(\frac{Y}{n}\right) = \frac{1}{n}E(Y) = \frac{np}{n} = p$$

e

$$Var(P) = Var\left(\frac{Y}{n}\right) = \frac{1}{n^2}Var(Y) = \frac{npq}{n^2} = \frac{pq}{n}$$

QUESTÃO 05: (1 PONTO) Sejam X e Y variáveis aleatórias no mesmo espaço de probabilidade. A covariância entre X e Y é definida por

$$\mathrm{Cov}(X, Y) = \sigma_{X,Y} = E[(X - \mu_X)(Y - \mu_Y)];$$

Desde que as esperanças, presentes na expressão, existam.

a) **(0,3 PONTO)** Demonstre que $\mathrm{Cov}(X, Y) = E(XY) - \mu_X\mu_Y$.

b) **(0,7 PONTO) Resultado:** Se X e Y são variáveis aleatórias independentes, então $\mathrm{Cov}(X, Y) = 0$.

A recíproca desse resultado não é verdadeira, isto é, covariância nula não implica independência entre as variáveis. Considere a função de densidade de probabilidade conjunta, dada pela equação (1) e sua região de definição de densidade plotada na Figura 1. Mostre que a recíproca do resultado acima não é verdadeira.

$$f(x, y) = \begin{cases} 4, & se\ 0 < y < x; x + y < 1, \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \qquad (1)$$

CONCURSO PÚBLICO DE PROVAS E TÍTULOS PARA O CARGO EFETIVO DE PROFESSOR DA CARREIRA DE MAGISTÉRIO SUPERIOR – EDITAL Nº 28/2023 – PROGRAD

FOLHA DE QUESTÕES

Área: **Número de C.P.F**___________________________

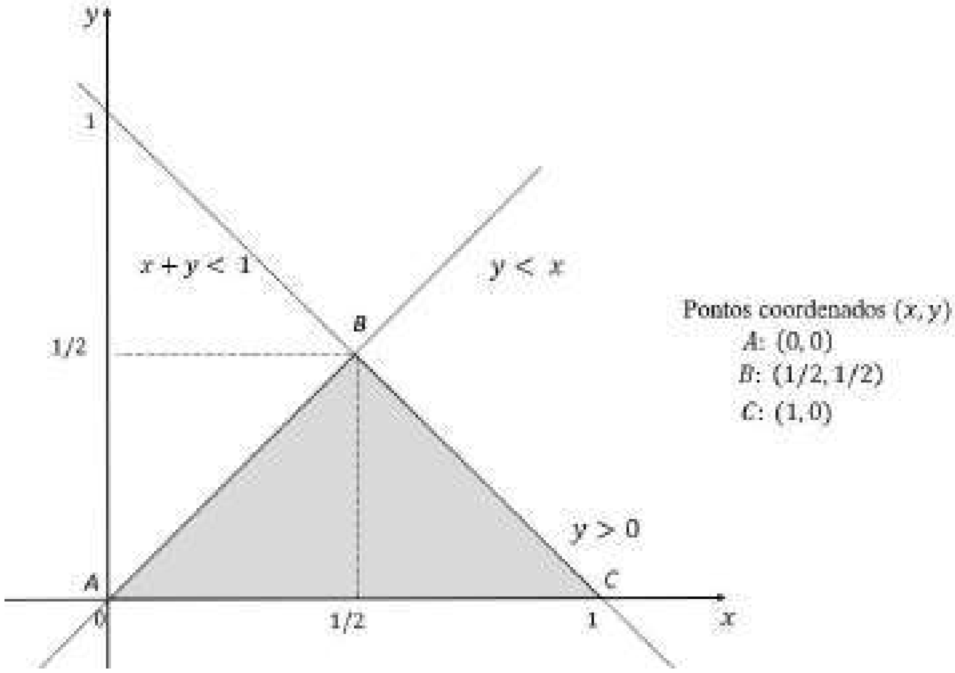

Figura 1. Região de definição da função de densidade $f(x, y)$.

CHAVE DE CORREÇÃO

a)

$$Cov(X,Y) = E[(X - \mu_X)(Y - \mu_Y)]$$

$$Cov(X,Y) = E[(XY - \mu_X Y - \mu_Y X + \mu_X \mu_Y)]$$

$$Cov(X,Y) = E(XY) - \mu_X E(Y) - \mu_Y E(X) + \mu_X \mu_Y$$

$$Cov(X,Y) = E(XY) - \mu_X \mu_Y$$

b) A marginal de Y é calculada pela expressão:

$$f_y(y) = \int_y^{1-y} 4 \ dx \quad = 4[(1-y) - y] = 4 - 8y \text{ para } 0 < y < \frac{1}{2}$$

CONCURSO PÚBLICO DE PROVAS E TÍTULOS PARA O CARGO EFETIVO DE PROFESSOR DA CARREIRA DE MAGISTÉRIO SUPERIOR – EDITAL Nº 28/2023 – PROGRAD

FOLHA DE QUESTÕES

Área: **Número de C.P.F**____________________________

A marginal de X é calculada por partes:

- $0 < x < \frac{1}{2}$

$$f_X(x) = \int_0^x 4 \; dy = 4x$$

- $\frac{1}{2} \leq x < 1$

$$f_X(x) = \int_0^{1-x} 4\, dy = 4(1 - x) = 4 - 4x$$

Logo,

$$f_X(x) = \begin{cases} 4x, \text{ se } 0 < x < \dfrac{1}{2} \\ 4 - 4x, \text{ se} \dfrac{1}{2} \leq x < 1 \\ 0, \qquad se\; x \leq 0 \text{ ou } x \geq 1 \end{cases}$$

$$E(X) = \int_0^{1/2} x4xdx + \int_{1/2}^{1} x(4-4x)dx = \frac{4x^3}{3}\Big|_0^{1/2} + \left(2x^2 - \frac{4x^3}{3}\right)\Big|_{1/2}^{1} = \frac{4}{3}\times\frac{1}{8} + 2 - \frac{4}{3} - \frac{2}{4} + \frac{4}{3}\times\frac{1}{8}$$
$$= \frac{1}{2}$$

$$E(Y) = \int_0^{1/2} y(4-8y)dy = \left(2y^2 - \frac{8}{3}y^3\right)\Big|_0^{1/2} = 2\times\frac{1}{4} - \frac{8}{3}\times\frac{1}{8} = \frac{1}{6}$$

$$E(XY) = \int_0^{\frac{1}{2}}\int_y^{1-y} (4xy)dxdy = \int_0^{\frac{1}{2}} 4y\left(\int_y^{1-y} x\, dx\right)dy = \int_0^{\frac{1}{2}} 2y[(1-y)^2 - y^2]dy =$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}} (2y - 4y^2)dy = \left(y^2 - \frac{4y^3}{3}\right)\Big|_0^{1/2} = \frac{1}{4} - \frac{4}{3}\times\frac{1}{8} = \frac{1}{12}$$

Logo, $Cov(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = \frac{1}{12} - \frac{1}{2}\times\frac{1}{6} = 0.$

CONCURSO PÚBLICO DE PROVAS E TÍTULOS PARA O CARGO EFETIVO DE PROFESSOR DA CARREIRA DE MAGISTÉRIO SUPERIOR – EDITAL Nº 28/2023 – PROGRAD

FOLHA DE QUESTÕES

Área: **Número de C.P.F**___________________________

Tem-se, então, que $Cov(X,Y) = 0$, mas X e Y não são independentes, pois

$$f_{X,Y}(x,y) \neq f_X(x)f_Y(y).$$

QUESTÃO 06: (1,5 PONTO) Seja $x_1,\ x_2,\dots,x_n$ uma amostra aleatória de tamanho n da distribuição exponencial, a qual tem função densidade de probabilidade $f_X(x;\lambda) = \frac{1}{\lambda}e^{-\frac{x}{\lambda}}$, onde $x > 0$ e $\lambda > 0$.

a) **(0,5 PONTO)** Encontre o valor esperado da variável aleatória X.

b) **(0,5 PONTO)** Obtenha o estimador de máxima verossimilhança para o valor esperado da variável aleatória X.

c) **(0,5 PONTO)** Obtenha a distribuição assintótica do estimador de máxima verossimilhança de λ.

CHAVE DE CORREÇÃO

a)

$$E[X] = \int_0^{+\infty} x f_X(x;\lambda)dx = \int_0^{+\infty} x\left(\frac{1}{\lambda}e^{-\frac{x}{\lambda}}\right)dx = \frac{1}{\lambda}\left[\int_0^{+\infty} x\,e^{-\frac{x}{\lambda}}dx\right]$$

Integrando por partes com $u = x$ e $dv = e^{-\frac{x}{\lambda}}dx$, de modo que $du = dx$ e $v = -\lambda e^{-\frac{x}{\lambda}}$, podemos encontrar

$$E[X] = \frac{1}{\lambda}\left[x\left(-\lambda e^{-\frac{x}{\lambda}}\right)\Big|_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} -\lambda e^{-\frac{x}{\lambda}}\,dx\right] = -xe^{-\frac{x}{\lambda}}\Big|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} e^{-\frac{x}{\lambda}}\,dx =$$

$$= 0 - \lambda e^{-\frac{x}{\lambda}}\Big|_0^{+\infty} = \lambda$$

Note que a expressão $-xe^{-\frac{x}{\lambda}}\Big|_0^{+\infty}$ é zero, pois ao substituirmos $+\infty$ na expressão $\frac{x}{-e^{\frac{x}{\lambda}}}$, temos uma indeterminação do tipo $\frac{\infty}{\infty}$, e como as funções do numerador e denominador são deriváveis, sendo que a derivada do denominador é diferente de zero. Assim, podemos aplicar a Regra de L'Hôpital para obter

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{-e^{x/\lambda}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{(x)'}{(-\,e^{x/\lambda})'} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{-\frac{1}{\lambda}\,e^{x/\lambda}} = 0.$$

CONCURSO PÚBLICO DE PROVAS E TÍTULOS PARA O CARGO EFETIVO DE PROFESSOR DA CARREIRA DE MAGISTÉRIO SUPERIOR – EDITAL Nº 28/2023 – PROGRAD

FOLHA DE QUESTÕES

Área: **Número de C.P.F**___________________________

b)

Do item a), tem-se que o valor esperado da variável aleatória X é λ, então será a questão fica reduzida a encontrar o estimador pelo método de máxima verossimilhança para o parâmetro λ. Logo, a função de verossimilhança de λ considerando uma amostra observada $x_1, x_2, \dots, x_n$ é dada por:

$$L(\lambda) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i;\lambda) \quad \Rightarrow \quad l(\lambda) = \log\left(\prod_{i=1}^{n} f(x_i;\lambda)\right) = \sum_{i=1}^{n} \log\big(f(x_i;\lambda)\big).$$

Logo, segue que: $l(\lambda) = -n\log\lambda\ - \frac{1}{\lambda}\sum_{i=1}^{n} x_i$. Assim, para encontrarmos, o estimador $\hat{\lambda}$ que maximize a função $l(\lambda)$, devemos encontrar a raiz da equação de verossimilhança, ou seja, $\frac{d}{d\lambda} l(\lambda)|_{\lambda=\hat{\lambda}} = 0$, assim, segue:

$$\frac{d}{d\lambda} l(\lambda) = -n\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda^2}\sum_{i=1}^{n} x_i = 0 \Rightarrow -n\hat{\lambda} + \sum_{i=1}^{n} x_i = 0 \ \Rightarrow \hat{\lambda} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \bar{x}.$$

Daí, $\hat{\lambda} = \bar{X}$ é candidato a estimador de máxima verossimilhança de λ.

Para verificarmos se $\hat{\lambda}$ é um ponto de máximo de $l(\lambda)$, é necessário verificar se $\frac{d^2\, l(\lambda)}{d\,\lambda^2}|_{\lambda=\hat{\lambda}} < 0$, assim segue que, $\frac{d^2\, l(\lambda)}{d\,\lambda^2}|_{\lambda=\hat{\lambda}} = \frac{n}{\hat{\lambda}^2} - \frac{2}{\hat{\lambda}^3}\sum_{i=1}^{n} x_i < 0$.

Portanto, o estimador de máxima verossimilhança (EMV) de λ é $\hat{\lambda} = \bar{X}$.

c)

Uma das propriedades do estimador de máxima verossimilhança é a Normalidade Assintótica, ou seja, considerando que são satisfeitas as condições de regularidade, quando o tamanho da amostra for suficientemente grande, a distribuição assintótica do estimador de máxima verossimilhança, $\hat{\lambda}$, pode ser aproximada por:

$$\sqrt{n}(\hat{\lambda} - \lambda)\, N\left(0, \frac{1}{I_F(\lambda)}\right) \Leftrightarrow \hat{\lambda} \sim N\left(\lambda, \frac{1}{n\, I_F(\lambda)}\right) \quad \text{(aproximação assintótica)}$$

em que $I_F(\lambda)$ é a informação de Fisher. Temos, então: $l(\lambda) = \log\big(f(x;\lambda)\big) = -\log\lambda\ - \frac{1}{\lambda}x \ \Rightarrow$ $\frac{d}{d\lambda} l(\lambda) = -\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda^2}x$ e $\frac{d^2}{d\lambda^2} l(\lambda) = \frac{1}{\lambda^2} - \frac{2}{\lambda^3}x$, assim, $I_F(\lambda) = -E\left[\frac{d^2}{d\lambda^2} l(\lambda)\right] = -E\left[\frac{1}{\lambda^2} - \frac{2}{\lambda^3}X\right] = -\frac{1}{\lambda^2} + \frac{2}{\lambda^3}E[X] = -\frac{1}{\lambda^2} + \frac{2}{\lambda^3}\lambda = \frac{1}{\lambda^2}$

Portanto, a distribuição assintótica do EMV $\hat{\lambda}$ é dada por $\hat{\lambda} \sim N\left(\lambda, \frac{\lambda^2}{n}\right)$.