EDITAL 50/2025
MODELO DA CHAVE DE CORREÇÃO - PROVA ESCRITA

AREA: Matemática e estatística **QUESTÃO 1: (1,25)**

ITENS DA QUESTÃO	POSSÍVEL RESPOSTA QUANTO AO CONTEÚDO
Derivadas de funções reais de uma variável real Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-3}{2\sqrt{3}}, & x < \sqrt{3}, \\ 0, & x = \sqrt{3}, \\ \ln(x+1-\sqrt{3}), & x > \sqrt{3}. \end{cases}$$ Utilizando a definição de derivadas, verifique se a função f é derivável em $x = \sqrt{3}$.	Em síntese, para resolver a questão, o candidato deve dominar os conceitos de limite, continuidade e derivada definidos pelo limite, bem como o estudo de funções definidas por partes. Além disso, precisa aplicar a definição formal de derivada para calcular derivadas laterais e verificar sua igualdade, utilizando técnicas de cálculo de limites envolvendo funções algébricas e logarítmicas. O problema exige, ainda, habilidade de análise local da função, rigor lógico e clareza na argumentação matemática, uma vez que a derivabilidade em um ponto depende simultaneamente da continuidade e da concordância das derivadas laterais. Primeiramente, verificamos a continuidade em $x = \sqrt{3}$: $$\lim_{x\to\sqrt{3}^-} f(x) = \frac{(\sqrt{3})^2-3}{2\sqrt{3}} = 0, \qquad \lim_{x\to\sqrt{3}^+} f(x) = \ln(1) = 0,$$ e $$f(\sqrt{3}) = 0.$$ Logo, f é contínua em $x = \sqrt{3}$. Embora exista uma relação entre continuidade e derivabilidade, a continuidade de uma função não é condição suficiente para sua derivabilidade. Segundo [1], para verificar se uma função é derivável em um ponto, é necessário analisar diretamente a definição de derivada, isto é, o limite do quociente incremental. Segundo [2], para verificar se uma função f é derivável em um ponto x_0, isto é, se $f'(x_0)$ existe, deve-se calcular o limite: $$f'_-(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}.$$

ITENS DA QUESTÃO	POSSÍVEL RESPOSTA QUANTO AO CONTEÚDO
	Se tal limite existir e for finito, então $f'(x_0)$ existe. De acordo com a teoria do cálculo diferencial, $f'(x_0)$ existe e é finita se, e somente se, as derivadas laterais à esquerda $f'_-(x_0)$ e à direita $f'_+(x_0)$ forem iguais. Assim, calculamos as derivadas laterais pela definição, tomando $x_0 = \sqrt{3}$. **Derivada lateral à esquerda** $$f'_-(\sqrt{3}) = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(\sqrt{3}+h) - f(\sqrt{3})}{h}.$$ Para $h < 0$, tem-se $\sqrt{3} + h < \sqrt{3}$, logo $$f(\sqrt{3}+h) = \frac{(\sqrt{3}+h)^2 - 3}{2\sqrt{3}}.$$ Assim, $$f'_-(\sqrt{3}) = \lim_{h\to 0^-} \frac{\dfrac{(\sqrt{3}+h)^2 - 3}{2\sqrt{3}} - 0}{h}.$$ Expandindo: $$(\sqrt{3}+h)^2 - 3 = 3 + 2\sqrt{3}h + h^2 - 3 = 2\sqrt{3}h + h^2.$$ Logo, $$f'_-(\sqrt{3}) = \lim_{h\to 0^-} \frac{2\sqrt{3}h + h^2}{2\sqrt{3}h} = \lim_{h\to 0^-} \left(1 + \frac{h}{2\sqrt{3}}\right) = 1.$$

ITENS DA QUESTÃO	POSSÍVEL RESPOSTA QUANTO AO CONTEÚDO
	Derivada lateral à direita $$f'_+(\sqrt{3}) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(\sqrt{3}+h) - f(\sqrt{3})}{h}.$$ Para $h > 0$, tem-se $$f(\sqrt{3}+h) = \ln(\sqrt{3}+h+1-\sqrt{3}) = \ln(1+h).$$ Logo, $$f'_+(\sqrt{3}) = \lim_{h \to 0^+} \frac{\ln(1+h) - 0}{h}.$$ Usando o limite fundamental: $$\lim_{h \to 0} \frac{\ln(1+h)}{h} = 1,$$ temos $$f'_+(\sqrt{3}) = 1.$$ Como $$f'_-(\sqrt{3}) = f'_+(\sqrt{3}) = 1,$$ conclui-se que f é derivável em $x = \sqrt{3}$ e $$\boxed{f'(\sqrt{3}) = 1.}$$

AREA: Matemática e estatística **QUESTÃO 2: (1,25)**

<table>
<tr><th>ITENS DA QUESTÃO</th><th>POSSÍVEL RESPOSTA QUANTO AO CONTEÚDO</th></tr>
<tr><td>

Integrais de funções reais de uma variável real

Seja $f : [0, 2] \to \mathbb{R}$ uma função de variável real contínua por partes, dada por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{3x^2 + 4x}{x^3 + 2x^2 + 4}, & 0 \leq x \leq 1, \\ \dfrac{\ln\left(\frac{1}{x}\right)}{x^2}, & 1 < x \leq 2. \end{cases}$$

Calcule a integral

$$\int_0^2 f(x)\,dx.$$

</td><td>

Na questão em tela, exige-se do candidato a capacidade de expor uma argumentação descritiva e concisa acerca do conceito de integral definida, bem como das propriedades das funções contínuas por partes. Inicialmente, é necessário reconhecer que a função apresentada é definida por partes em subintervalos do domínio e que, em cada subintervalo aberto, tal função é contínua. Conforme [2], tal característica permite concluir, com base nos fundamentos da teoria da integração, que a função é integrável no intervalo considerado.

Além disso, é fundamental que o candidato demonstre domínio das principais técnicas de integração, tais como a substituição de variáveis e a integração por partes, identificando corretamente a estrutura algébrica das expressões integrandas. A escolha adequada dessas técnicas revela não apenas habilidade operacional, mas também compreensão conceitual dos mecanismos que fundamentam o cálculo integral.

$$\int_0^2 f(x)\,dx = \int_0^1 \frac{3x^2 + 4x}{x^3 + 2x^2 + 4}\,dx + \int_1^2 \frac{\ln(1/x)}{x^2}\,dx.$$

1) Primeira integral (substituição):
Seja

$$u = x^3 + 2x^2 + 4.$$

Então,

$$\frac{du}{dx} = 3x^2 + 4x \quad \Rightarrow \quad du = (3x^2 + 4x)\,dx.$$

</td></tr>
</table>

ITENS DA QUESTÃO	POSSÍVEL RESPOSTA QUANTO AO CONTEÚDO
	Logo, $$\int_0^1 \frac{3x^2+4x}{x^3+2x^2+4}\,dx = \int_{u(0)}^{u(1)} \frac{1}{u}\,du.$$ Calculando os limites: $$u(0)=4, \quad u(1)=7.$$ Portanto, $$\int_4^7 \frac{1}{u}\,du = \ln\lvert u\rvert\Big\rvert_4^7 = \ln 7 - \ln 4 = \ln\frac{7}{4}.$$ **2) Segunda integral (integração por partes):** $$\int_1^2 \frac{\ln(1/x)}{x^2}\,dx.$$ Tomemos: $$u = \ln\left(\frac{1}{x}\right), \quad dv = \frac{1}{x^2}\,dx.$$ Então: $$du = -\frac{1}{x}\,dx, \quad v = \int \frac{1}{x^2}\,dx = -\frac{1}{x}.$$ Pela fórmula da integração por partes: $$\int u\,dv = uv - \int v\,du.$$

ITENS DA QUESTÃO	POSSÍVEL RESPOSTA QUANTO AO CONTEÚDO
	Logo, $$\int_1^2 \frac{\ln(1/x)}{x^2}\,dx = \left[-\frac{\ln(1/x)}{x}\right]_1^2 - \int_1^2 \frac{1}{x^2}\,dx.$$ Calculando: $$\left[-\frac{\ln(1/x)}{x}\right]_1^2 = \frac{\ln 2}{2}, \qquad \int_1^2 \frac{1}{x^2}\,dx = \frac{1}{2}.$$ Portanto, $$\int_1^2 \frac{\ln(1/x)}{x^2}\,dx = \frac{\ln 2 - 1}{2}.$$ **Resultado final:** $$\boxed{\int_0^2 f(x)\,dx = \ln\frac{7}{4} + \frac{\ln 2 - 1}{2}.}$$

AREA: Matemática e estatística **QUESTÃO 3: (1,25)**

<table>
<tr><th>ITENS DA QUESTÃO</th><th>POSSÍVEL RESPOSTA QUANTO AO CONTEÚDO</th></tr>
<tr><td>

Matrizes e determinantes

Seja a matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{pmatrix},$$

em que a, b e c são números reais distintos.

(a) (0,625 ponto) Calcule o determinante de A.

(b) (0,625 ponto) Suponha que a, b e c são as raízes da equação

$$x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0.$$

Determine os valores de a, b e c (na ordem $a < b < c$) e demonstre que $\det(A) = 2$.

</td><td>

A questão exige do candidato conhecimentos de Álgebra Linear e Álgebra Elementar. No item (a), o concursando deve saber calcular determinantes de matrizes 3×3, reconhecer ou deduzir a fórmula do determinante da matriz de *Vandermonde* descrita em [3] e manipular expressões algébricas por meio de operações elementares nas linhas da matriz.

No item (b), é necessário resolver uma equação polinomial cúbica por fatoração, identificar e ordenar as raízes reais e, em seguida, aplicar a fórmula do determinante de *Vandermonde* para demonstrar o valor pedido. Além disso, a questão requer capacidade de raciocínio lógico, organização de argumentos e escrita matemática formal, pois envolve não apenas cálculos, mas também justificativas e demonstrações.

(a) Cálculo do determinante de A.

Por definição , o determinante de uma matriz de *Vandermonde* é dado por:

$$\det(A) = \prod_{1\leq i<j\leq 3} (x_j - x_i)$$
$$\det(A) = (b-a)(c-a)(c-b)$$

.

</td></tr>
</table>

ITENS DA QUESTÃO	POSSÍVEL RESPOSTA QUANTO AO CONTEÚDO
	(b) Cálculo dos valores de a, b e c Para determinar a, b e c, vamos fatorar a equação cúbica. Procuramos raízes inteiras que dividam o termo constante -6, ou seja, $\pm1, \pm2, \pm3, \pm6$. Testando $x = 1$: $$1^3 - 6(1)^2 + 11(1) - 6 = 1 - 6 + 11 - 6 = 0 \implies x = 1 \text{ é raiz.}$$ Dividindo o polinômio por $(x-1)$ usando divisão de polinômios ou regra de $Ruffini$: $$x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = (x-1)(x^2 - 5x + 6).$$ Fatorando o termo quadrático: $$x^2 - 5x + 6 = (x-2)(x-3).$$ Portanto, as raízes na ordem exigida são: $$\boxed{a = 1,\ b = 2,\ c = 3}.$$ Agora, substituímos no determinante de *Vandermonde*: $$\det(A) = (b-a)(c-a)(c-b) = (2-1)(3-1)(3-2) = 1 \cdot 2 \cdot 1 = 2.$$ Portanto: $$\boxed{\det(A) = 2}.$$

AREA: Matemática e estatística **QUESTÃO 4: (1,25)**

<table>
<tr><th>ITENS DA QUESTÃO</th><th>POSSÍVEL RESPOSTA QUANTO AO CONTEÚDO</th></tr>
<tr><td>

Sistemas de equações lineares

Considere o sistema linear dependente dos parâmetros reais α e β:

$$\begin{cases} \alpha x + y + z = 1, \\ x + \alpha y + z = 1, \\ x + y + \alpha z = \beta. \end{cases}$$

(a) (1,0 ponto) Determine os valores de α para os quais o sistema:

i) possui solução única;
ii) possui infinitas soluções;
iii) não possui solução.

(b) (0,25 ponto) Para os valores de α encontrados no item anterior, determine as condições sobre β para que o sistema possua infinitas soluções.

</td><td>

A resolução do problema envolve conhecimentos fundamentais de Álgebra Linear, especialmente relacionados à análise de sistemas lineares dependentes de parâmetros. Inicialmente, é necessário identificar a matriz de coeficientes do sistema e calcular seu determinante, utilizando-o como critério para classificar o sistema quanto à existência e unicidade de soluções [3]. Quando o determinante é diferente de zero, conclui-se que o sistema possui solução única; quando é nulo, torna-se necessária uma análise mais detalhada dos parâmetros envolvidos. Nesse contexto, o candidato deve manipular equações algébricas, examinar a consistência do sistema e reconhecer situações de dependência linear entre as equações. Além disso, é essencial interpretar o papel dos parâmetros (α) e (β) na estrutura do sistema, realizando uma análise de casos e justificando rigorosamente as conclusões obtidas. Em síntese, o problema mobiliza habilidades de cálculo algébrico, raciocínio lógico, análise crítica e comunicação matemática formal.

A matriz do sistema é

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & 1 \\ 1 & 1 & \alpha \end{pmatrix}.$$

Calculamos o determinante:

$$\det(A) = (\alpha - 1)^2(\alpha + 2).$$

</td></tr>
</table>

ITENS DA QUESTÃO	POSSÍVEL RESPOSTA QUANTO AO CONTEÚDO

(a) Classificação do sistema

- Se $\alpha \neq 1$ e $\alpha \neq -2$, então $\det(A) \neq 0$ e o sistema possui solução única.
- Se $\alpha = 1$, o sistema torna-se:

$$\begin{cases} x + y + z = 1, \\ x + y + z = 1, \\ x + y + z = \beta. \end{cases}$$

  - Se $\beta = 1$, há infinitas soluções (Observe que as duas primeiras equações são idênticas).
  - Se $\beta \neq 1$, não há solução. (Isso implica que a mesma expressão $x + y + z$ deveria ser igual a 1 e a 2 ao mesmo tempo, o que é uma contradição.)

- Se $\alpha = -2$, o sistema torna-se:

$$\begin{cases} -2x + y + z = 1, \\ x - 2y + z = 1, \\ x + y - 2z = \beta. \end{cases}$$

  Somamos as três equações membro a membro:

$$0 = 2 + \beta.$$

ITENS DA QUESTÃO	POSSÍVEL RESPOSTA QUANTO AO CONTEÚDO
	• Se $\beta = -2$, há infinitas soluções (Pois $\alpha = -2$ e $\det(A) = 0$. Verifica-se também que as equações do sistema são linearmente dependentes). • Se $\beta \neq -2$, não há solução (Ocorre uma contradição em $0 = 2 + \beta$). **Conclusão final:** (i) Solução única: $\alpha \notin \{1, -2\}, \forall \beta$. (ii) Infinitas soluções: $(\alpha, \beta) \in \{(1, 1),\ (-2, -2)\}$. (iii) Sem solução: $(\alpha = 1, \beta \neq 1)$ ou $(\alpha = -2, \beta \neq -2)$. **(b) Análise detalhada das condições sobre β** O item (b) consiste em determinar os valores de β que tornam o sistema compatível indeterminado quando $\det(A) = 0$. Sabemos que: $$\det(A) = 0 \iff \alpha = 1 \text{ ou } \alpha = -2.$$ **Caso 1: $\alpha = 1$.** O sistema é: $$x + y + z = 1, \quad x + y + z = 1, \quad x + y + z = \beta.$$ As duas primeiras equações são idênticas. Para que o sistema seja compatível, a terceira equação deve ser consistente com as demais.

ITENS DA QUESTÃO	POSSÍVEL RESPOSTA QUANTO AO CONTEÚDO
	Logo, é necessário que: $$\beta = 1.$$ Se $\beta \neq 1$, teríamos duas equações iguais e uma equação diferente, o que gera contradição. Portanto: $$\alpha = 1 \quad \Rightarrow \quad \beta = 1 \quad \text{(infinitas soluções)}.$$ **Caso 2: $\alpha = -2$.** O sistema é: $$\begin{cases} -2x + y + z = 1, \\ x - 2y + z = 1, \\ x + y - 2z = \beta. \end{cases}$$ Somando as três equações, obtemos: $$(-2x + x + x) + (y - 2y + y) + (z + z - 2z) = 1 + 1 + \beta,$$ $$0 = 2 + \beta.$$ Para que o sistema seja compatível, é necessário que: $$\beta = -2.$$

ITENS DA QUESTÃO	POSSÍVEL RESPOSTA QUANTO AO CONTEÚDO
	Se $\beta \neq -2$, a soma das equações resulta em uma contradição, logo o sistema é incompatível. Assim: $$\alpha = -2 \quad \Rightarrow \quad \beta = -2 \quad \text{(infinitas soluções).}$$ — **Conclusão final:** A questão pede para, dado cada α que anula o determinante, dizer qual β correspondente gera infinitas soluções. Matematicamente, é a mesma informação de (ii) do item (a), só que a redação em (b) é condicional, enquanto em (a)(ii) é a listagem completa dos casos. Portanto, a resposta final é $\boxed{\text{Se } \alpha = 1, \text{ então } \beta = 1; \quad \text{se } \alpha = -2, \text{ então } \beta = -2.}$

AREA: Matemática e estatística **QUESTÃO 5: (1,25)**

<table>
<tr><th>ITENS DA QUESTÃO</th><th>POSSÍVEL RESPOSTA QUANTO AO CONTEÚDO</th></tr>
<tr><td>

<h2>Espaço vetorial</h2>

Seja V o subespaço de $\mathbb{R}^4$ definido por

$$V = \left\{ (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid \begin{array}{c} -3x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ \text{e } x_2 - 2x_4 = 0 \end{array} \right\}.$$

(a) (0,625 ponto) Determine uma base B de V e a dimensão de V.

(b) (0,625 ponto) Verifique se o conjunto

$$S = \{(1,2,-1,1),\ (2,2,2,1),\ (1,-2,7,-1)\}$$

é uma base de V. Justifique sua resposta.

</td><td>

A questão exige a interpretação de um subespaço de $\mathbb{R}^4$ como o conjunto solução de um sistema linear homogêneo, bem como a determinação de sua forma paramétrica. O candidato deve identificar vetores geradores e extrair uma base por meio do conceito de combinação linear, reconhecendo a relação entre o número de parâmetros livres e a dimensão do subespaço [3]. Além disso, é necessário verificar a pertinência de vetores ao subespaço e analisar a independência linear de um conjunto dado, utilizando relações lineares entre vetores. Por fim, a resolução requer domínio dos conceitos de subespaço, base, dimensão e dependência linear, aliados ao uso rigoroso da linguagem e do raciocínio algébrico.

O subespaço V é definido por:

$$-3x_1 + 2x_2 + x_3 = 0, \quad x_2 - 2x_4 = 0.$$

Da segunda equação:

$$x_2 = 2x_4.$$

Substituindo na primeira:

$$-3x_1 + 4x_4 + x_3 = 0 \Rightarrow x_3 = 3x_1 - 4x_4.$$

Logo, as variáveis livres, que são aquelas associadas aos parâmetros que geram o subespaço, são x_1 e x_4, portanto

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1(1,0,3,0) + x_4(0,2,-4,1).$$

</td></tr>
</table>

ITENS DA QUESTÃO	POSSÍVEL RESPOSTA QUANTO AO CONTEÚDO
	(a) Base e dimensão Equivalentemente, pode-se tomar a base obtida anteriormente, ou seja, $$B = \{(1,0,3,0),\ (0,2,-4,1)\}.$$ Como a dimensão de V é igual ao número de vetores da base B, $dim(V) = 2$. **(b) Verificação do conjunto S** Considere $$S = \{v_1 = (1,2,-1,1),\ v_2 = (2,2,2,1),\ v_3 = (1,-2,7,-1)\}.$$ Verificamos que todos os vetores pertencem a V e que: $$v_3 = -v_1 + 2v_2.$$ Logo, os vetores são linearmente dependentes e, como $\dim(V) = 2$, o conjunto S não pode ser uma base. $$\boxed{S \text{ não é base de } V.}$$

AREA: Matemática e Estatística QUESTÃO 6: (1,25)

<table>
<tr><th>ITENS DA QUESTÃO</th><th>POSSIVEL RESPOSTA QUANTO AO CONTEÚDO</th></tr>
<tr><td>

QUESTÃO 06:

(1,25 ponto) O diâmetro (em mm) de sementes viáveis de uma espécie arbórea pode ser modelado por uma distribuição normal com média 6 e desvio-padrão 0,5. Considere as aproximações usuais da normal padrão: $\Phi(1) = 0{,}84$ e $\Phi(2) = 0{,}98$.

(a) (0,45 ponto) Calcule a probabilidade de uma semente ter diâmetro entre 5,5 mm e 6,5 mm.

(b) (0,45 ponto) Calcule a probabilidade de uma semente ter diâmetro inferior a 5 mm.

(c) (0,35 ponto) Sabendo que uma semente foi selecionada ao acaso dessa população, determine a probabilidade de seu diâmetro ser maior que 6,5 mm.

</td><td>

Na questão em tela, exige-se do candidato o domínio do modelo da distribuição normal, bem como a capacidade de realizar a padronização de uma variável aleatória contínua e calcular probabilidades associadas a intervalos e regiões de cauda, utilizando aproximações usuais da normal padrão. Seja Xo diâmetro (em mm) de uma semente viável, com $X \sim \mathcal{N}(6,\, 0{,}5^2)$. A padronização é dada por $Z = \frac{X-\mu}{\sigma} = \frac{X-6}{0{,}5}$, em que $Z \sim \mathcal{N}(0{,}1)$.

(a) (0,45 ponto)

$$P(5{,}5 < X < 6{,}5) = P\left(\frac{5{,}5-6}{0{,}5} < Z < \frac{6{,}5-6}{0{,}5}\right) = P(-1 < Z < 1).$$

Utilizando as aproximações usuais $\Phi(1) = 0{,}84$ e, por simetria, $\Phi(-1) = 1 - \Phi(1) = 0{,}16$, obtém-se:

$$P(-1 < Z < 1) = \Phi(1) - \Phi(-1) = 0{,}84 - 0{,}16 = 0{,}68.$$

(b) (0,45 ponto)

$$P(X < 5) = P\left(Z < \frac{5-6}{0{,}5}\right) = P(Z < -2).$$

Como $\Phi(2) = 0{,}98$, tem-se:

$$P(Z < -2) = 1 - \Phi(2) = 1 - 0{,}98 = 0{,}02.$$

(c) (0,35 ponto)

$$P(X > 6{,}5) = P\left(Z > \frac{6{,}5-6}{0{,}5}\right) = P(Z > 1) = 1 - \Phi(1) = 1 - 0{,}84 = 0{,}16.$$

</td></tr>
</table>

AREA: Matemática e Estatística QUESTÃO 7: (1,25)

<table>
<tr><th>ITENS DA QUESTÃO</th><th>POSSIVEL RESPOSTA QUANTO AO CONTEÚDO</th></tr>
<tr><td>

QUESTÃO 07:

(1,25 ponto) Investigou-se a relação entre a densidade de árvores por hectare e o diâmetro médio à altura do peito (DAP) em parcelas permanentes. Para duas variáveis aleatórias X e Y, representando essas grandezas, sabe-se que:

i) ambas possuem distribuição aproximadamente normal;

ii) $E(X) = 0$ e $E(Y) = 0$;

iii) $Var(X) = Var(Y) = 1$;

iv) $Var(X - Y) = 0{,}4$.

Determine o coeficiente de correlação linear entre X e Y e interprete o sinal obtido no contexto do problema.

</td><td>

A questão exige do candidato conhecimentos sobre variáveis aleatórias bivariadas e sobre o coeficiente de correlação linear de Pearson. Para sua resolução, é necessário utilizar propriedades da variância e da covariância, bem como a relação entre essas grandezas e o coeficiente de correlação. Além do cálculo algébrico, espera-se a interpretação do sinal do coeficiente obtido no contexto da relação entre densidade de árvores por hectare e o diâmetro médio à altura do peito (DAP).

Sejam X e Y as variáveis aleatórias que representam, respectivamente, a densidade de árvores por hectare e o DAP médio. São fornecidas as seguintes informações:

$$E(X) = 0, E(Y) = 0, Var(X) = Var(Y) = 1, Var(X - Y) = 0{,}4.$$

Utiliza-se a identidade:

$$Var(X - Y) = Var(X) + Var(Y) - 2\,Cov(X, Y).$$

Substituindo os valores fornecidos, obtém-se:

$$\begin{aligned} &0{,}4 = 1 + 1 - 2\,Cov(X, Y),\\ &0{,}4 = 2 - 2\,Cov(X, Y),\\ &2\,Cov(X, Y) = 1{,}6,\\ &Cov(X, Y) = 0{,}8. \end{aligned}$$

O coeficiente de correlação linear de Pearson é definido por:

$$\rho_{XY} = \frac{Cov(X, Y)}{\sqrt{Var(X)}\,\sqrt{Var(Y)}}.$$

Como $Var(X) = Var(Y) = 1$, tem-se:

$$\rho_{XY} = \frac{0{,}8}{\sqrt{1} \cdot \sqrt{1}} = 0{,}8.$$

Logo, o coeficiente de correlação linear entre X e Y é igual a 0,8.

</td></tr>
</table>

	O sinal positivo indica que existe uma associação direta entre as variáveis, ou seja, maiores densidades de árvores por hectare tendem a estar associadas a maiores valores médios de diâmetro à altura do peito. O valor 0,8indica uma associação linear forte entre as variáveis consideradas.

AREA: Matemática e Estatística QUESTÃO 8: (1,25)

<table>
<tr><th>ITENS DA QUESTÃO</th><th>POSSIVEL RESPOSTA QUANTO AO CONTEÚDO</th></tr>
<tr><td>

QUESTÃO 08:

(1,25 ponto) Em um estudo avalia-se se um novo tratamento silvicultural aumenta o crescimento médio anual em diâmetro (em cm) de uma espécie arbórea. Estudos anteriores indicam que, sob manejo tradicional, o crescimento médio anual é de 2,5 cm. Uma amostra aleatória de 16 árvores submetidas ao novo tratamento apresentou crescimento médio anual de 2,9 cm, com desvio-padrão amostral de 0,8 cm. Admita que o crescimento anual segue distribuição normal e que a variância populacional é desconhecida. Considere, para o teste unilateral a 5%, que $t_{0,95;15} = 1,75$.

(a) (0,60 ponto) Formule as hipóteses estatísticas adequadas.
(b) (0,65 ponto) Utilizando o teste t de *Student* unilateral, ao nível de significância de 5%, verifique se há evidências estatísticas de aumento no crescimento médio anual.

</td><td>

A questão avalia a capacidade do candidato de formular hipóteses estatísticas e aplicar o teste $t$de Student para a média populacional, sob suposição de normalidade e variância populacional desconhecida. É necessário identificar tratar-se de um teste unilateral à direita (aumento), calcular a estatística de teste com base nos dados amostrais e comparar com o valor crítico informado para decisão, concluindo no contexto do problema.

Dados: $\mu_0 = 2{,}5$, $\bar{x} = 2{,}9$, $s = 0{,}8$, $n = 16$, $\alpha = 0{,}05$, e $t_{0,95;15} = 1{,}75$.

(a) (0,60 ponto) Hipóteses estatísticas

Como a hipótese de interesse é aumento do crescimento médio anual, considera-se teste unilateral à direita:

$$H_0\colon \mu = 2{,}5 \quad \text{(equivalentemente, pode-se enunciar } \mu \le 2{,}5\text{)},$$

$$H_1\colon \mu > 2{,}5.$$

(b) (0,65 ponto) Estatística de teste, região crítica, decisão e conclusão

A estatística do teste t é:

$$t = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}}.$$

Substituindo os valores:

$$t = \frac{2{,}9 - 2{,}5}{0{,}8/\sqrt{16}} = \frac{0{,}4}{0{,}8/4} = \frac{0{,}4}{0{,}2} = 2.$$

Os graus de liberdade são:

$$\nu = n - 1 = 15.$$

Como o teste é unilateral à direita ao nível $\alpha = 0{,}05$, a região crítica é:

$$\text{Rejeitar } H_0 \text{ se } t > t_{0,95;15} = 1{,}75.$$

</td></tr>
</table>

	Como $t = 2$ e $2 > 1{,}75$, rejeita-se H_0. Conclui-se que há evidências estatísticas, ao nível de significância de 5%, de que o novo tratamento silvicultural aumenta o crescimento médio anual em diâmetro.